

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. С. Бойко, М. П. Бурик, А. А. Шуляк

МЕТОДИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації,
електропривод та електромобільність»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *Пушкар М.В.*, канд. техн. наук, доц., кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу, факультет електроенерготехніки та автоматики

Відповідальний редактор *Бойко В. С.*, док. техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 01.10.2020 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол № 10 від 24.06.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Бойко Валерій Степанович, док. техн. наук
Бурик Микола Петрович, канд. техн. наук
Шуляк Анатолій Антонович, старший викладач

МЕТОДИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКАМ

Методи електродинаміки в електротехніці: Лабораторний практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / В. С. Бойко, М. П. Бурик, А. А. Шуляк; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 14,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 145 с.

Представлено лабораторний практикум з дисципліни "Методи електродинаміки в електротехніці та електромеханіці", у яких проводяться аналіз несиметричних режимів трифазних кіл методом симетричних складових та досліджуються електричні кола з розподіленими параметрами. Приведено моделювання картини електричного поля (математичні програми Matlab та Mathcad) двопровідної лінії полем струму у провідниковому листі, електричного поля діелектричного циліндра та кулі в однорідному зовнішньому полі.

Призначений для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

© В. С. Бойко, М. П. Бурик, А. А. Шуляк 2020

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

	стор.
Вступ.....	5
Основні положення	6
1. Основні правила техніки безпеки	7
2. Лабораторна робота № 1. Дослідження симетричних складових трифазної системи напруг	10
3. Лабораторна робота № 2. Дослідження усталених режимів однорідної лінії.....	37
4. Лабораторна робота №3 Моделювання електричного поля двопровідної лінії полем струму у провідному листі	86
5. Лабораторна робота №4 Моделювання електричного поля діелектричного та провідного циліндра на ЕОМ	117
6. Лабораторна робота №5 Моделювання електричного поля діелектричної та провідної кулі в однорідному зовнішньому електростатичному полі на ЕОМ	134
ДОДАТОК А Приклад оформлення титульного аркуша лабораторної роботи	145

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

A, B, C – фази трифазного кола
ДСТУ – державного стандарту України
ЕРС – електрорушійна сила
ЄСКД – єдина система конструкторської документації
ККД – коефіцієнт корисної дії
НДЛС – навчально-дослідницький лабораторний стенд
 a - оператор повороту вектора
 C – ємність
 E – джерело ЕРС
 \overline{E} – напруженість поля
 G – провідність
 I – електричний струм
 L – індуктивність
 R – активний опір
 U – електрична напруга
 U_{φ} – напруга падаючої хвилі
 U_{ψ} – напруга відбитої хвилі
 Z_c – характеристичний опір
 α – коефіцієнт згасання
 β – коефіцієнт фази
 $\underline{\gamma}$ – коефіцієнт поширення (передачі)
 γ – питома електрична провідність
 ε – діелектрична проникність
 λ – довжина хвилі
 φ – потенціал електричного поля

ВСТУП

Кредитний модуль «Методи електродинаміки в електротехніці та електромеханіці» призначений для підготовки магістрів за спеціальністю 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” та спеціалізацією “Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність”.

Мета навчального посібника до виконання лабораторних робіт полягає у закріпленні набутих теоретичних положень шляхом експериментального дослідження, формуванні уміння використовувати методи моделювання процесів у електричних та магнітних колах під час дії постійних та синусоїдних ЕРС за допомогою імітаційних та математичних моделей створених у пакеті прикладних програм Matlab та Mathcad.

До складу навчального посібника входять лабораторні роботи, у яких аналізуються: несиметричні режими трифазного кола за допомогою фільтрів симетричних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей; хвильові процеси в однорідних довгих лініях у сталих синусоїдних режимах з втратами та без втрат; електричне поле за допомогою двопровідної лінії поля струму у провідному листі; картина електричного поля діелектричного циліндра та діелектричної кулі в однорідному зовнішньому полі.

Кожна лабораторна робота має основні теоретичні відомості та складається з наступних частин:

- експериментальне дослідження та обробка отриманих даних;
- математичне моделювання координат електричних систем у пакеті прикладних програм Matlab або Mathcad. (інтерфейси запропонованих програми дозволяють змінювати параметри моделі та отримувати дані про змінні системи у вигляді графіків миттєвих значень).

Навчальний посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання, які вивчають дисципліну "Методи електродинаміки в електротехніці та електромеханіці".

Основні положення

Виконання лабораторних робіт допомагає студентам засвоїти теоретичний матеріал та здійснити експериментальну перевірку законів та методів теорії електричних кіл, набуті практичні навички роботи з лабораторним устаткуванням та вимірювальною апаратурою.

Для виконання лабораторних робіт студентська група поділяється на бригади по 3-4 особи, але не менше двох згідно правил безпеки. За кожною бригадою закріплюється робоче місце на увесь час лабораторного практикуму.

Підготовка кожного студента до лабораторної роботи передбачає:

1. Ознайомлення з порядком виконання запланованої лабораторної та теоретичним матеріалом за темою роботи. Для цього потрібно скористатися «Навчальним посібником», який представлений у друкованому вигляді та у вигляді електронних документів на сайті кафедри. «Навчальний посібник» містить інформацію не лише щодо робочого завдання, але й стислі теоретичні відомості за темою лабораторного дослідження. Якісна підготовка до наступного лабораторного заняття передбачає також самостійну роботу студентів над окремими розділами підручників, зазначених в «Навчальному посібнику»;
2. Підготовку звітного протоколу встановленого зразка, в якому мають бути:
а) титульний лист; б) мета роботи; в) хід роботи; г) розрахункові формули, які використовуються при виконанні робочого завдання; д) висновки за експериментальними даними та графіками.
3. Формулювання відповідей на запитання, які пропонуються в «Навчальному посібнику», для поглибленого розуміння сутності лабораторного дослідження.

На початку заняття викладач визначає рівень готовності кожного студента до проведення досліджень та приймає рішення щодо можливості

допуску студента до роботи.. *Студент, не підготовлений до виконання лабораторної роботи, до її виконання не допускається.*

Під час виконання лабораторної роботи студенти виконують робоче завдання: складають електричне коло згідно схеми, здійснюють вимірювання електричних величин, передбачених протоколом роботи, заносять дослідні дані у відповідні таблиці та перевіряють розрахункові співвідношення. Тільки після схвалення викладачем одержаних результатів студенти мають право демонтувати електричне коло, яке досліджували, та складати інше. Наприкінці заняття викладач візує усі екземпляри лабораторних звітів, що свідчить про виконання кожним студентом експериментальної частини лабораторної роботи.

Студент самостійно має здійснити обробку результатів експериментів та підготувати відповіді на контрольні питання. *На наступному лабораторному занятті студент зобов'язаний подати викладачу до захисту повністю оформлений звіт попередньої лабораторної роботи та пред'явити підготовлений протокол для виконання чергової роботи. Студент, який не оформив або не захистив дві лабораторні роботи, відсторонюється від наступного лабораторного заняття. Його участь у подальших лабораторних заняттях можлива лише за умови ліквідації заборгованості.*

На першому занятті викладач проводить інструктаж з техніки безпеки виконання лабораторних робіт та показує робочі місця студентських бригад: надає інформацію щодо побудови навчально-дослідних стендів та правил користування вимірювальними приладами.

- Основні правила техніки безпеки

1. При виконанні робіт на електротехнічних пристроях слід неухильно дотримуватись правил техніки безпеки, оскільки електрична напруга від 36 (В) є небезпечною для життя людини.

2. Заборонено виконувати дослідження на робочому місці поодиночі.

3. Електричне коло дозволяється складати лише за умови відсутності напруги на вихідних затискачах джерел живлення, що забезпечується відповідним положенням вимикачів активних блоків НДЛС та загальним вимикачем розподільчого щита лабораторії. Це правило стосується і випадків, коли під час дослідів виникає потреба будь-яких змін в електричному колі, що досліджується (замінити вимірювальний прилад, приєднати додаткове джерело живлення, змінити характер навантаження та інші).

4. Без дозволу викладача студентам забороняється вмикати джерела живлення і подавати напругу на складене ними електричне коло.

5. Увімкнення та вимкнення електричного кола слід здійснювати однією рукою. Інша рука при цьому не повинна торкатися елементів електричного кола. Бажано, щоб обличчя особи, яка виконує комутаційні операції, знаходилось якомога далі від комутаційної апаратури.

6. Забороняється торкатися до струмопровідних частин електричного кола, доки коло знаходиться під напругою.

7. Забороняється виконувати будь-які операції з обладнанням розподільного щита лабораторії.

8. У разі виявлення іскріння контактів, запаху горілої ізоляції або нагрітого металу слід негайно вимкнути блок НДЛС з джерелами, які живлять електричне коло, та знеструмити вимірювальні прилади. Негайно звернутися за допомогою до викладача, який має право вимкнути рубильник на розподільному щиті.

9. Усі особисті речі, що не мають відношення до виконання лабораторної роботи студенти зобов'язані залишити у спеціально призначеному для цього місці у лабораторії.

10. Під час лабораторних занять студенти мають додержуватись тиші та порядку, не виходити з приміщення без дозволу викладача. Лабораторне

заняття триває без перерви і закінчується за 5 хвилин до перерви перед наступною парою.

11. Наприкінці заняття потрібно привести робоче місце у порядок та повернути лаборанту додаткове обладнання, яке було надано бригаді для виконання роботи.

Лабораторна робота № 1

ДОСЛІДЖЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ ТРИФАЗНОЇ СИСТЕМИ НАПРУГ

Мета роботи: дослідити електричні кола, які виконують функції фільтрів симетричних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей трифазних несиметричних систем напруг.

Проаналізувати вихідні напруги фільтрів, що використовуються як вхідні сигнали пристроїв ідентифікації та захисту від несиметричних режимів в електроенергетиці.

Тривалість роботи: 4 години.

1. Основні теоретичні відомості

Метод симетричних складових ґрунтується на поданні будь-якої трифазної несиметричної системи фізичних величин (ЕРС, напруг, струмів і т. ін.) у вигляді суми трьох симетричних систем, які називають *симетричними складовими прямої, зворотної та нульової послідовностей фаз* [1-5].

Розглянемо трифазні системи, позначаючи комплексні ЕРС (напруги, струми) кожної з фаз відповідно літерами \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} . Величини, що стосуються симетричних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей, будемо індексувати відповідно символами 1, 2, 0.

Симетричну систему *прямої* послідовності фаз утворюють три однакових за модулем вектори \dot{A}_1 , \dot{B}_1 , \dot{C}_1 , які зсунуті один відносно одного на кут $2\pi/3$, причому \dot{B}_1 відстає від \dot{A}_1 , а \dot{C}_1 відстає від \dot{B}_1 (рис. 1.1, а).

Симетричну систему *зворотної* послідовності фаз утворюють три однакових за модулем векторами \dot{A}_2 , \dot{B}_2 , \dot{C}_2 , які також зсунуті між собою на

кут $2\pi/3$, але тепер вектор \dot{C}_2 відстає від \dot{A}_2 , а \dot{B}_2 відстає від \dot{C}_2 (рис. 1.1, б).

Симетрична система *нульової* послідовності фаз складається з трьох векторів $\dot{A}_0, \dot{B}_0, \dot{C}_0$, однакових за модулем та фазою (рис. 1.1, в).

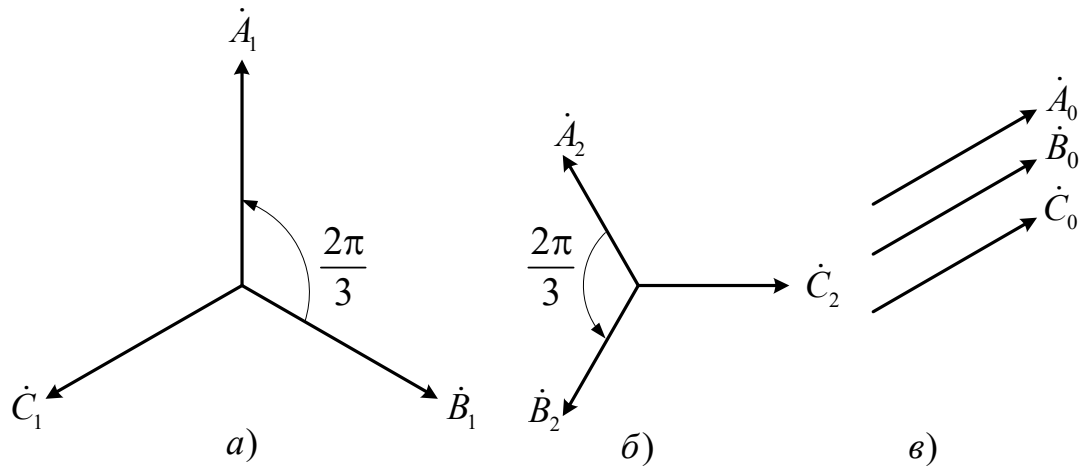


Рисунок 1.1 – Векторні діаграми симетричних складових прямої (а), зворотної (б) та нульової послідовностей (в)

Користуючись ($a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$) оператором повороту вектора на кут $2\pi/3$ у додатному напрямі та приймаючи вектори $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$ за базові, виразимо через них усі інші

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_1 &= a^2 \dot{A}_1, \quad \dot{B}_2 = a \dot{A}_2, \quad \dot{B}_0 = \dot{A}_0 \\ \dot{C}_1 &= a \dot{A}_1, \quad \dot{C}_2 = a^2 \dot{A}_2, \quad \dot{C}_0 = \dot{A}_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$\text{де } a^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Легко пересвідчитись, що додавання трьох показаних вище симетричних систем (рис. 1.1) дає несиметричну систему векторів $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ (рис. 1.2). Кожен вектор цієї системи є сумою трьох векторів – відповідних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей. Доведемо, що будь-

яка трифазна несиметрична система векторів однозначно розкладається на симетричні складові

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0, \\ \dot{B} &= \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0, \\ \dot{C} &= \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

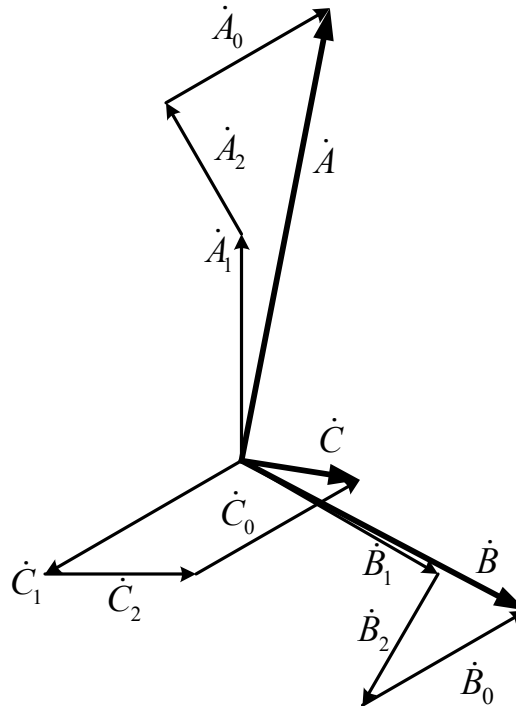


Рисунок 1.2 – Векторна діаграма несиметричної системи векторів

Перепишемо рівняння (1.2), використовуючи співвідношення (1.1)

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0, \\ \dot{B} &= a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2 + \dot{A}_0, \\ \dot{C} &= a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Отримана система трьох рівнянь з трьома невідомими $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$ розв'язується однозначно. Для визначення \dot{A}_0 знайдемо суму лівих та правих частин рівнянь (1.3). Враховуючи, що $1 + a^2 + a = 0$, отримаємо

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}). \quad (1.4)$$

Для визначення \dot{A}_1 знайдемо суму лівих та правих частин рівнянь(1.3), помноживши спочатку друге рівняння на a та третє – на a^2 . В результаті будемо мати

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}). \quad (1.5)$$

Виконаємо аналогічну операцію, помноживши спочатку друге рівняння на a^2 та третє – на a , і знаходимо \dot{A}_2

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C}). \quad (1.6)$$

З рівняння (1.4) видно, що коли сума векторів несиметричної системи дорівнює нулю, будуть дорівнювати нулю також і вектори нульової послідовності. Отже, *несиметричні системи лінійних напруг (струмів) у разі відсутності нульового проводу містять лише симетричні складові прямої та зворотної послідовностей.*

Визначення симетричних складових за виразами (1.4) – (1.6) можна здійснити графічно. Припустимо, що відома несиметрична система векторів фазних напруг чи струмів (рис. 1.3, а). У кожне з рівнянь (1.4) – (1.6) вектор \dot{A} входить без змін, а вектори \dot{B} та \dot{C} в рівняннях (1.5) і (1.6) повернуті на $\pm 2\pi/3$. Починаємо побудову, відкладаючи вектори $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ у такій послідовності, як показано на (рис. 1.3, б). Потім повертаємо на кут $\pm 2\pi/3$ вектор \dot{B} навколо його кінця, що прилягає до початку вектора \dot{A} , і вектор \dot{C} навколо його початку, що прилягає до кінця вектора \dot{A} (рис. 1.3, б).

Тепер легко знаходяться суми векторів, які містяться всередині дужок кожного з виразів (1.4) – (1.6) і дорівнюють відповідно $3\dot{A}_0, 3\dot{A}_1, 3\dot{A}_2$. Далі

очевидною побудовою визначаються всі вектори трьох симетричних систем прямої, зворотної та нульової послідовностей.

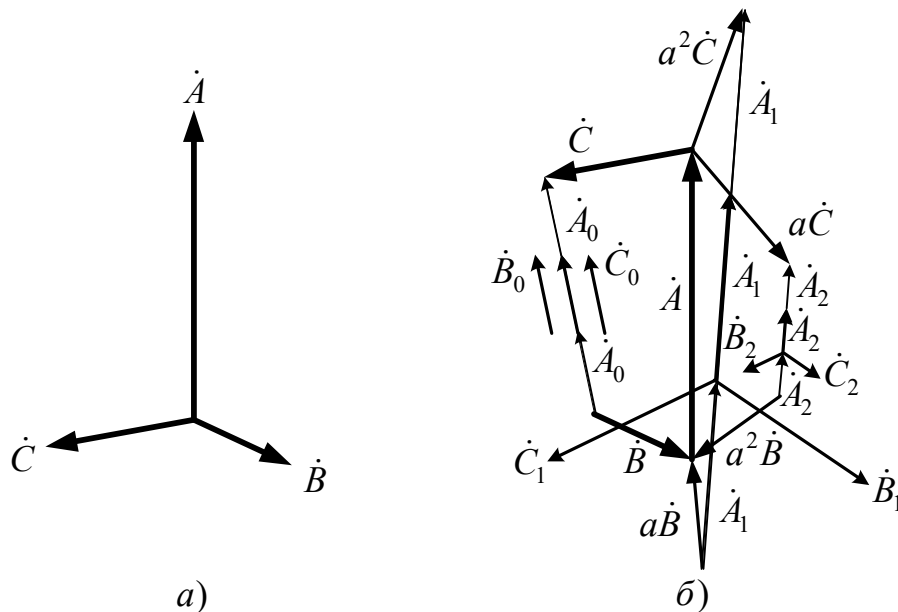


Рисунок 1.3 – Векторна діаграма несиметричної системи векторів (а) та графічний метод визначення симетричних складових (б)

Розкладання несиметричної трифазної системи ЕРС на симетричні складові означає еквівалентну заміну ЕРС кожної фази на послідовне з'єднання трьох ЕРС окремих складових. Джерелу несиметричної трифазної системи струмів відповідає паралельне з'єднання трьох джерел окремих симетричних складових у кожній фазі.

Симетричні складові струмів та напруг можна не тільки розрахувати, а і виміряти за допомогою спеціальних вимірювальних схем – *фільтрів симетричних складових струмів і напруг*. Ці фільтри широко застосовуються у системах захисту електроенергетичних мереж.

Фільтром напруги (струму) симетричних складових називають електричне коло, на вхід якого подають досліджувану несиметричну трифазну систему напруг (струмів), а на виході отримують напругу (струм) однієї певної симетричної складової. Фільтри зазвичай складаються з трансформаторів, активних та реактивних опорів, параметри яких підібрані

так, щоб пропускати на вихід лише складові бажаної послідовності та не пропускати інших. Отже, якщо на вхід фільтра будь-якої послідовності подані складові інших послідовностей, то напруга чи струм на виході від цих послідовностей повинні дорівнювати нулю.

Наприклад, напруга на виході фільтра напруги зворотної послідовності дорівнюватиме нулю, якщо на вхід подані напруги прямої чи нульової послідовностей. При подачі ж на вхід фільтра напруги зворотної послідовності на його виході з'явиться напруга, значення якої залежить від параметрів фільтра і опору навантаження, ввімкненого між вихідними полюсами.

Розглянемо схему фільтра напруги зворотної послідовності, що досліджується в лабораторній роботі (рис. 1.6) та доведемо, що при

$R_1 = R_2$; $R_3 = \sqrt{3}X_C$ напруга на виході кола $\dot{U}_{\text{вих}}$ пропорційна симетричній складовій зворотної послідовності \dot{U}_{A2} системи вхідних фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Для цього виразимо симетричну складову зворотної послідовності \dot{U}_{A2} через лінійні напруги несиметричної системи

$$\begin{aligned}\dot{U}_{A2} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_B - a\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}[\dot{U}_A + (a^2 + a)\dot{U}_B - a(\dot{U}_B - \dot{U}_C)] = \frac{1}{3}\left[\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right].\end{aligned}\quad (1.7)$$

Визначимо напругу $\dot{U}_{\text{вих}}$ на виході кола (рис. 1.6) з урахуванням вказаних вище співвідношень між параметрами елементів кола

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\text{вих}} &= \frac{1}{2}\dot{U}_{AB} + \frac{\dot{U}_{BC}}{R_3 - jX_C}(-jX_C) = \frac{1}{2}\dot{U}_{AB} + \frac{\dot{U}_{BC}}{1 + j\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{U}_{AB} + \frac{1}{2}\dot{U}_{BC}e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left[\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right].\end{aligned}\quad (1.8)$$

Відповідно $\dot{U}_{\text{вих}} = \frac{3}{2} \dot{U}_{A2}$. Таким чином, коло на (рис. 1.6) виконує

функцію фільтра зворотної послідовності системи фазних напруг трифазної системи.

2. Опис лабораторної установки

2.1 Технічні характеристики і конструкція

Дослідження симетричних складових трифазної системи напруг виконується на навчально-дослідному лабораторному стенді (НДЛС) «Практика» [8]. Для виконання лабораторної роботи кожна бригада отримує додаткові комплектуючі: з'єднувальні дроти, набірні резистори та перемички. Для здійснення вимірювань параметрів електричних величин використовують вольтметр.

Пульт НДЛС – 1 2.00.00 (рис. 1.4) складається з трьох частин: ліва частина – це джерела електричної енергії (три активних блока), середня частина є складальним полем, права частина вміщує блоки пасивних елементів (навантаження).

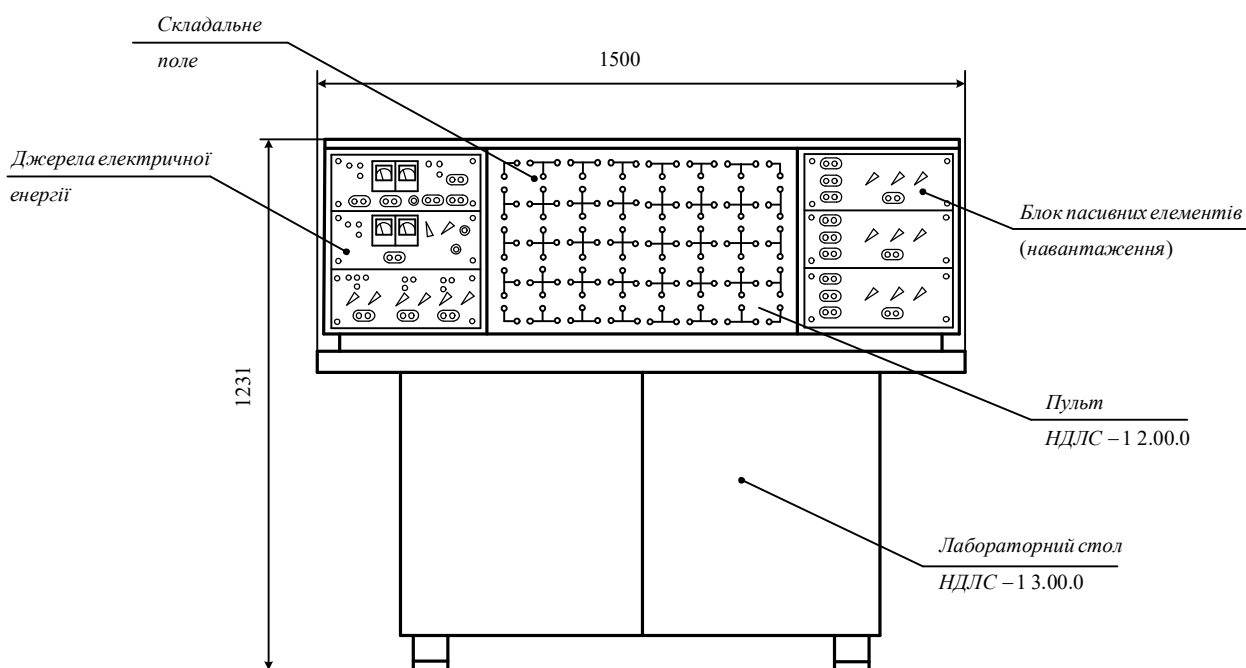


Рисунок 1.4 – Навчально-дослідний лабораторний стенд «НДЛС-1»

Джерела енергії стенду згруповані у блоки постійної напруги, змінної напруги та трифазної напруги. Блок трифазної напруги працює на промисловій частоті 50 Гц. Діюче значення кожної фазної напруги змінюється за допомогою перемикачів у межах від 1 до 9 В та від 0 до 40 В. Кожна фаза має вихід на розетку. Початки та кінці трьох фаз джерела виведені на передню панель блоку, що дає змогу з'єднувати фази за схемою «зірки» чи «трикутника».

За допомогою загального тумблера «Мережа», який розміщений на передній панелі, підключаються фази джерела напруги (положення «Вкл»). При цьому висвітлюється індикатор «Мережа». У блоці трифазної напруги, окрім тумблера «Мережа», також присутні тумблери для вмикання кожної фази окремо. Усі джерела живлення мають швидкодіючу електронну систему захисту від перевантажень. Струм спрацьовування захисту дорівнює 1 А. При перевантаженнях у блоках спрацьовує захист, про що сповіщає індикатор «Захист». Для наступного використання джерела енергії слід усунути причину, яка веде до спрацьовування захисту, та натиснути на кнопку «Захист». При цьому коло захисту розмикається, індикатор «Захист» гасне, що свідчить про готовність джерела живлення до подальшої роботи.

Пасивні елементи НДЛС згруповані на кілька блоків: по два однакових блоки резисторів та конденсаторів та один блок індуктивностей. На передніх панелях блоків є гнізда для приєднання проводів, за допомогою яких елементи блоків вмикаються у схему. Блок резисторів вміщує три резистори ($R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 200 \text{ Ом}$, $R_3 = 400 \text{ Ом}$) та магазин опорів R_4 , опір якого змінюється від 1 до 999 Ом. Гранична активна потужність дорівнює 5 Вт.

Блок конденсаторів вміщує три конденсатори з ємностями $C_1 = 0.1 \text{ мкФ}$, $C_2 = 10 \text{ мкФ}$, $C_3 = 20 \text{ мкФ}$ та магазин конденсаторів C_4 , що змінює ємність у межах 0,01...9,99 мкФ. Гранична допустима напруга на конденсаторах дорівнює 160 В. Блок індуктивностей вміщує три котушки індуктивності: $L_1 = 1 \text{ Гн}$, $L_2 = 1.5 \text{ Гн}$, $L_3 = 2 \text{ Гн}$, та магазин індуктивностей L_4

з діапазоном зміни індуктивності від 0.1 до 999 мГн. Котушки L_1 та L_2 мають індуктивний зв'язок. Допустимий струм через котушки індуктивності становить 0.2 А. Складальне поле є панеллю з 67 парами роз'ємних з'єднань, які мають між собою на внутрішній стороні панелі запаяні у вузли по 4, 3 або 2 роз'ємних з'єднань. Роз'ємні з'єднання призначені для закріплення набірних елементів електричних кіл та дротів. Набірні елементи - це резистори, конденсатори та котушки індуктивності. До комплекту НДЛС входить набір з'єднувальних проводів зі штекерами, призначених для приєднання до складального поля джерел енергії, пасивних елементів.

2.2 Опис несиметричних систем напруги, що реалізовані на НДЛС «Практика»

На лабораторній установці досліджуються різні трифазні системи напруг, яким відповідають векторні діаграми, зображені на рис. 1.5, а-е.

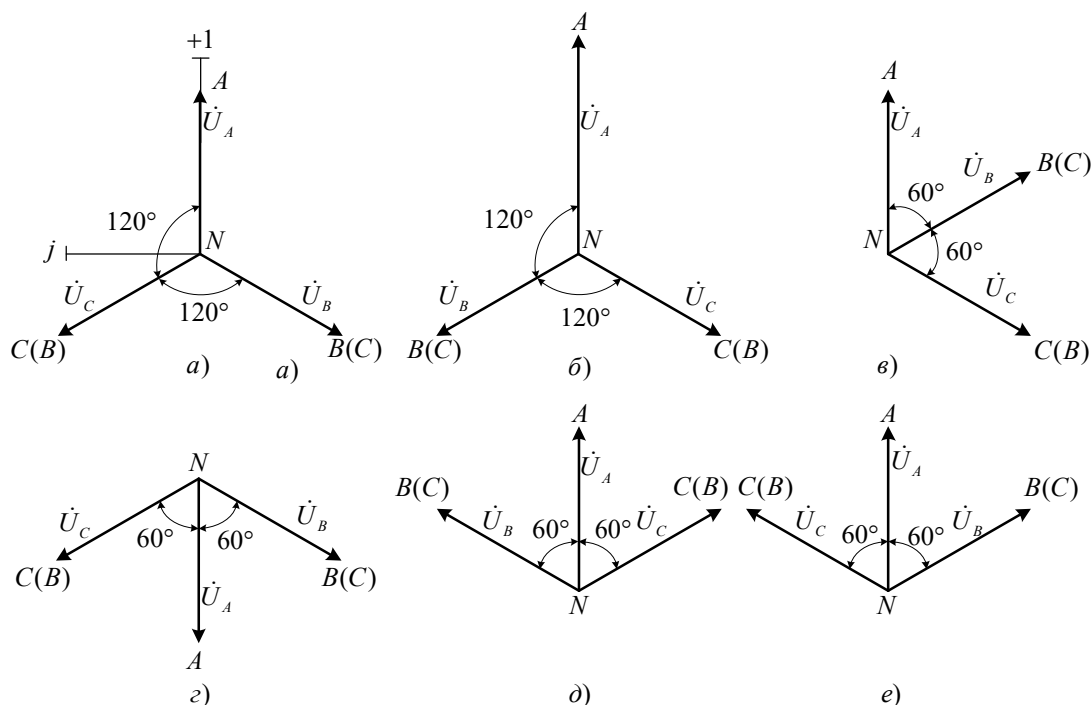


Рисунок 1.5 – Векторні діаграми трифазних систем напруг

Ці системи утворюються різними способами з'єднання початків і кінців обмоток A, B, C трифазного джерела між вузлами A, B, C та N (рис. 1.6-1.8).

Якщо до вузлів A, B, C приєднати початки (позначені маркерами) відповідних обмоток A, B, C , а до вузла N – кінці цих обмоток, то отримаємо систему фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, яка відповідає векторній діаграмі на (рис. 1.5, а), тобто $\dot{U}_A = U_A, \dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120^\circ}, \dot{U}_C = \dot{U}_A e^{+j120^\circ}$.

У цих виразах приймаємо, що вектор, який зображає напругу фази A , спрямований уздовж осі дійсних значень комплексної площини. Якщо тепер поміняти місцями початок і кінець обмотки однієї з фаз джерела, то це призведе до того, що вектор відповідної фазної напруги \dot{U}_A, \dot{U}_B чи \dot{U}_C змінить свій напрям на протилежний, тобто аргумент \dot{U}_A, \dot{U}_B чи \dot{U}_C зміниться на 180° .

Наприклад, якщо поміняти місцями початок і кінець обмотки фази A , то векторна діаграма системи фазних напруг буде виглядати так, як показано на (рис. 1.5, з) $\dot{U}_A = U_A e^{j180^\circ}, \dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120^\circ}, \dot{U}_C = \dot{U}_A e^{+j120^\circ}$.

Нарешті, взаємне перейменування будь-якої пари полюсів A, B, C трифазного джерела (рис. 1.2-1.8), змінює на векторній діаграмі взаємне розташування двох відповідних фазних напруг. Наприклад, система, показана на (рис. 1.5, б), утворюється з системи, показаної на (рис. 1.5, а), переминою місцями полюсів C та B , $\dot{U}_A = U_A; \dot{U}_B = \dot{U}_B e^{+j120^\circ}; \dot{U}_C = \dot{U}_C e^{-j120^\circ}$.

Аналогічно можна отримати інші трифазні системи напруг, зображені на рис. 1.5. Діючі значення фазних напруг регулюються в межах від нуля до певного максимального значення за допомогою перемикачів у відповідних фазах джерела трифазної напруги.

Для кожної з показаних на рис. 1.5 трифазних систем аналітично і графічно визначаються симетричні складові. Ті ж симетричні складові вимірюються за допомогою фільтрів симетричних складових.

2.3 Обладнання, яке використовується при виконанні роботи

2.3.1 Джерела трифазної ЕРС з напругою на виході 0-40 В. Діючі значення напруг U_A, U_B, U_C у кожній трифазній системі, показаній на (рис. 1.5, а – е), задає викладач.

2.3.2. Параметри елементів фільтрів прямої та зворотної послідовностей

$$R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}, X_C = \frac{1}{\omega C} = 159 \text{ Ом}, C = 20 \text{ мкФ}, R_3 = 275 \text{ Ом}.$$

2.3.3. Параметри елементів фільтру нульової послідовності

$$R_A = R_B = R_C = 200 \text{ Ом}.$$

2.3.4.. Цифровий вольтметр з класом точності 3 та граничною напругою 500 В.

3. Програма роботи

3.1 Ознайомитись з лабораторним обладнанням та вимірювальними приладами.

3.2 Дослідити несиметричні трифазні системи ЕРС за допомогою фільтрів симетричних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей.

3.3 Експериментально перевірити, що у колі на (рис. 1.6) за умови, що

$$R_1 = R_2, R_3 = \sqrt{3}X_C, \text{ вихідна напруга } \dot{U}_{\text{аєб}} \text{ пропорційна симетричній складовій зворотної послідовності } \dot{U}_{A2} \text{ трифазної системи напруг:}$$
$$\dot{U}_{\text{вих}} = k\dot{U}_{A2}.$$

3.4 Показати, що помінявши місцями напруги \dot{U}_B та \dot{U}_C у колі на (рис. 1.5), отримаємо фільтр (рис. 1.7) прямої послідовності системи фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ з тим же значенням коефіцієнта фільтру: $\dot{U}_{\text{вих}} = k\dot{U}_{A1}$.

3.5 Довести, що у колі на (рис. 1.8) при $R_A = R_B = R_C = R$ напруга $\dot{U}_{\text{вих}}$ на виході пропорційна напрузі нульової послідовності системи фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, коефіцієнт фільтру $k = 1 : \dot{U}_{\text{аєо}} = \dot{U}_{A0}$.

3.6 Провести аналітичний розрахунок та графічне визначення (за допомогою векторних діаграм) симетричних складових несиметричних систем.

Отримані результати порівняти з експериментальними даними.

3.7 Розробити модель у математичному середовищі MatLab (Simulink) з дослідження несиметричних джерел енергії та представити результати моделювання миттєвих значень вихідних напруг фільтрів симетричних складових.

3.8 Оформити звіт по лабораторній роботі.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ПО ВИКОНАННЮ РОБОТИ

1. Підготовка до виконання роботи

1. Вивчити основні теоретичні відомості по симетричним складовим трифазної системи напруг.

2. Написати рівняння, за допомогою яких визначаються симетричні складові прямої, зворотної та нульової послідовностей несиметричної трифазної системи напруг.

3. Написати рівняння, які виражають напруги кожної фази трифазної системи напруг через її симетричні складові прямої, зворотної та нульової послідовності.

4. Ознайомитись з електричними схемами фільтрів симетричних складових, зображених на рис. 1.6 – рис. 1.8. До вхідних полюсів кожного з фільтрів підводиться досліджувана система напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, створених трифазним джерелом, обмотки (фази) якого з'єднані зіркою без нульового проводу.

5. Вивчити програму роботи та конструкцію основних вузлів лабораторної установки.

6. Ознайомитися з контрольними питаннями лабораторної роботи.

2. Порядок виконання роботи

1. Записати в табл. 1.1 задані викладачем діючі значення фазних напруг кожної з досліджуваних трифазних систем.

Таблиця 1.1 – Діючі значення фазних напруг трифазних систем

Система	$U_A, В$	$U_B, В$	$U_C, В$
<i>a</i>			
<i>б</i>			
<i>в</i>			
<i>г</i>			
<i>д</i>			
<i>е</i>			

2. Відповідно до схеми рис. 1.6 скласти коло для визначення симетричної складової зворотної послідовності системи фазних напруг.

3. Для усіх систем (*a÷e*) встановити значення вхідних напруг згідно табл. 1.1 і виміряти значення вихідних напруг. Занести встановлені та виміряні значення в табл. 1.2.

4. Скласти коло, зображене на (рис. 1.7), для визначення симетричної складової прямої послідовності системи фазних напруг. Для цього в схемі на (рис. 1.6) поміняти місцями полюси B і C .

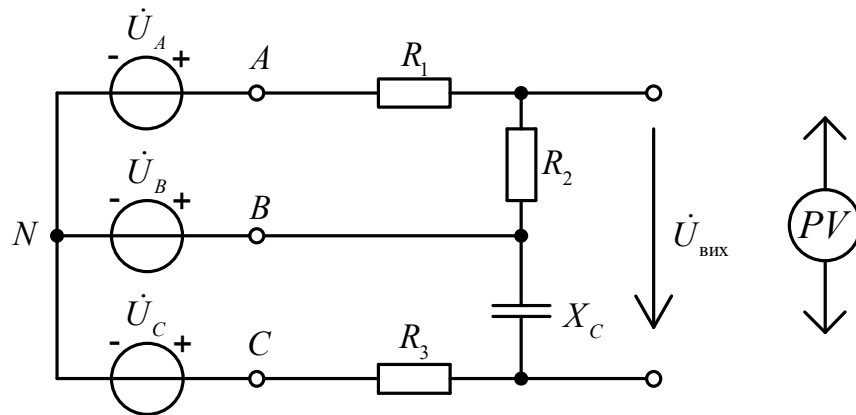


Рисунок 1.6 – Електрична схема для визначення симетричної складової зворотної послідовності системи фазних напруг

Таблиця 1.2 – Значення фазних напруг та вихідних напруг фільтра зворотної послідовності

Система	Вимірювання				Розрахунок U_{A2} , В		
	U_A , В	U_B , В	U_C , В	$U_{вих}$, В	$\frac{U_{вих}}{k}$	$\frac{\dot{A}+a^2\dot{B}+a\dot{C}}{3}$	Графічний метод
a							
b							
$в$							
$г$							
$д$							
e							

5. Для усіх систем ($a \div e$) встановити значення вхідних напруг згідно таблиці 1 і виміряти значення вихідних напруг. Занести встановлені та виміряні значення в табл. 1.3.

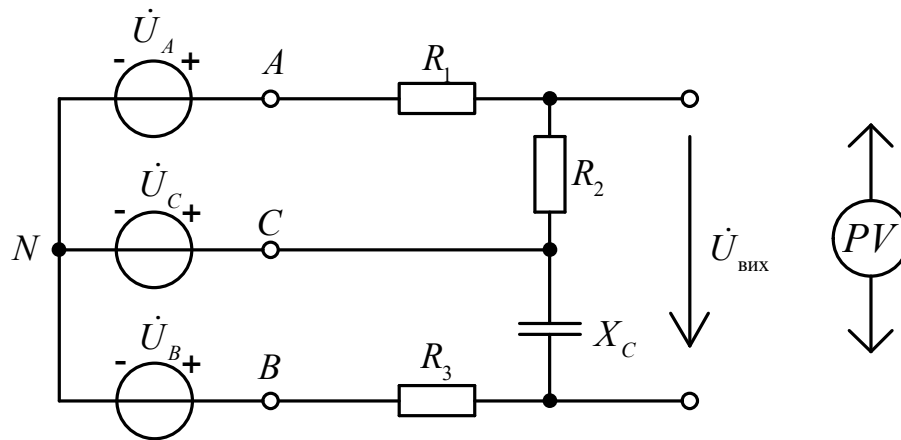


Рисунок 1.7 – Електрична схема для визначення симетричної складової прямої послідовності системи фазних напруг

Таблиця 1.3 – Значення вихідних напруг фільтра прямої послідовності

Система	Вимірювання				Розрахунок U_{A1} , В		
	U_A , В	U_B , В	U_C , В	$U_{\text{вих}}$, В	$\frac{U_{\text{вих}}}{k}$	$\frac{ \dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C} }{3}$	Графічний метод
a							
b							
b							
c							
d							
e							

6. Скласти коло, зображене на схемі рис. 1.8, для визначення симетричної складової нульової послідовності системи фазних напруг.

7. Для усіх систем ($a \div e$) встановити значення вхідних напруг згідно таблиці 1 і виміряти значення вихідних напруг. Занести встановлені та виміряні значення в таблицю 1.4.

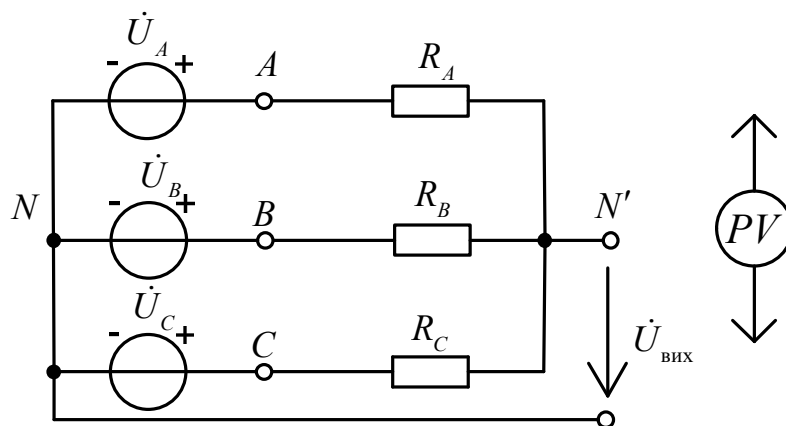


Рисунок 1.8 – Електрична схема для визначення симетричної складової нульової послідовності системи фазних напруг

Таблиця 1.4 – Фазні напруги та вихідні напруги фільтра нульової послідовності

Система	Вимірювання				Розрахунок $U_{A0}, \text{В}$		
	$U_A, \text{В}$	$U_B, \text{В}$	$U_C, \text{В}$	$U_{\text{вих}}, \text{В}$	$\frac{U_{\text{вих}}}{k}$	$\frac{ \dot{A} + \dot{B} + \dot{C} }{3}$	Графічний метод
a							
b							
$в$							
$г$							
d							
e							

3. Обробка результатів дослідів

1. За даними експериментів, наведеними у (табл. 2 – 4), для кожної системи фазних напруг побудувати векторні діаграми та графічно визначити симетричні складові прямої зворотної і нульової послідовності.

2. Для кожної системи ($a - e$) за даними табл. (2 – 4) аналітично визначити симетричні складові прямої, зворотної і нульової послідовності фазних напруг.

3. Порівняти значення симетричних складових систем фазних напруг, отримані експериментально, знайдені графічною побудовою і розраховані теоретично. Зробити висновки.

ЗМІСТ ЗВІТУ

Протокол з лабораторної роботи має містити матеріали, що оформлюються відповідно до правил та вимог ЄСКД та ДСТУ:

- титульний аркуш, прилад якого наведено у додатку А;
- мету та послідовність виконання лабораторної роботи;
- електричні схеми з параметрами елементів, що досліджуються;
- таблиці величин, що вимірюються та розраховуються;
- умови завдання для варіанту бригади;
- формули обчислень, повинні бути представлені у заданому порядку: рівняння у літерних позначеннях, рівняння у числах, відповідь та одиниці виміру;
- діаграми та графіки, що побудовані за результатами експериментів і розрахунків;
- програми та результати моделювання у математичних середовищах MatLab або Mathcad;
- висновки за даними лабораторної роботи (проаналізувати величини напруг фільтрів симетричних складових, що були отримані експериментальним, розрахунковим та графічним методами).

Питання для самостійної роботи

1. У чому полягає сутність методу симетричних складових?
2. Які симетричні складові містить несиметрична система лінійних струмів трифазного кола з'єднаного:
 - зіркою з нейтральним проводом;
 - зіркою без нейтрального проводу;
 - чи містять лінійні напруги складові нульової послідовності?;
3. Які симетричні складові містять фазні напруги несиметричного трифазного споживача, з'єднаного зіркою, якщо система прикладених лінійних напруг симетрична?;
4. Як зв'язані між собою симетричні складові фазних і лінійних напруг у разі з'єднування трифазного навантаження зіркою?;
5. Чи можливо стверджувати, що значення симетричних складових струмів будь якої послідовності залежить від складових напруг такої ж послідовності при несиметричному навантаженні?;
6. Якщо несиметрична трифазна система, з'єднана зіркою, не має нейтрального проводу, то чи будуть фазні струми містити нульову складову?;
7. Чи можуть струми нульової послідовності створити обертове магнітне поле?

Приклад аналізу несиметричної системи фазних напруг за допомогою симетричних складових

Розкласти несиметричну систему фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ (рис. 1.9) на симетричні складові аналітичним та графічним шляхами. Модулі фазних напруг $U_A = 10(B)$, $U_B = 10(B)$ та $U_C = 10(B)$. Трифазний генератор ЕРС з'єднаний за схемою «зірка».

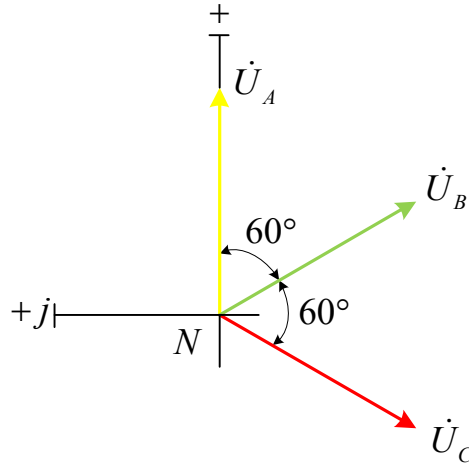


Рисунок 1.9 – Векторні діаграми ЕРС трифазних генератора напруг

Знайти симетричні складові систем лінійних та фазних напруг. Дослідити миттєві та діючі значення вихідних напруг фільтрів симетричних складових напруг, за допомогою математичної моделі трифазної системи ЕРС у пакеті прикладних програм Simulink та імітаційні моделі SimPowerSystems (Matlab). Перед початком моделювання задати параметри математичних моделей, які представлені у пункті 2.3 «Обладнання».

Визначимо симетричні складові фазної напруги \dot{U}_A

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{A0} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = \\
 &= \frac{1}{3}(10e^{j0^\circ} + 10e^{-j60^\circ} + 10e^{-j120^\circ}) = 6.667e^{-j60^\circ}, B; \\
 \dot{U}_{A1} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = \\
 &= \frac{1}{3}(10e^{j0^\circ} + (10e^{-j60^\circ})e^{j120^\circ} + (10e^{-j120^\circ})e^{-j120^\circ}) = 6.667e^{j60^\circ}, B; \\
 \dot{U}_{A2} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \\
 &= \frac{1}{3}(10e^{j0^\circ} + (10e^{-j60^\circ})e^{-j120^\circ} + (10e^{-j120^\circ})e^{j120^\circ}) = 3.333, B.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Знаючи симетричні складові фазної напруги \dot{U}_A , визначимо симетричні

складові фазних напруг \dot{U}_B та \dot{U}_C

$$\dot{U}_{A0} = \dot{U}_{B0} = \dot{U}_{C0} = 6.667e^{-j60^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{B1} = a^2 \dot{U}_{A1} = e^{-j120^\circ} 6.667e^{j60^\circ} = 6.667e^{-j60^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{C1} = a \dot{U}_{A1} = e^{j120^\circ} 6.667e^{j60^\circ} = 6.667e^{j180^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{B2} = a \dot{U}_{A2} = e^{j120^\circ} 3.333 = 3.333e^{j120^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{C2} = a^2 \dot{U}_{A2} = e^{-j120^\circ} 3.333 = 3.333e^{-j120^\circ}, B. \quad (1.10)$$

Симетричні складові лінійних напруг розраховуються за симетричними складовими фазних напруг

$$\dot{U}_{AB0} = \dot{U}_{A0} - \dot{U}_{B0} = 6.667e^{-j60^\circ} - 6.667e^{-j60^\circ} = 0;$$

$$\dot{U}_{BC0} = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{C0} = 6.667e^{-j60^\circ} - 6.667e^{-j60^\circ} = 0;$$

$$\dot{U}_{CA0} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{A0} = 6.667e^{-j60^\circ} - 6.667e^{-j60^\circ} = 0;$$

$$\dot{U}_{AB1} = \dot{U}_{A1} - \dot{U}_{B1} = 6.667e^{j60^\circ} - 6.667e^{-j60^\circ} = 11.547e^{j90^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{BC1} = \dot{U}_{B1} - \dot{U}_{C1} = 6.667e^{-j60^\circ} - 6.667e^{j180^\circ} = 11.547e^{-j30^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{CA1} = \dot{U}_{C1} - \dot{U}_{A1} = 6.667e^{j180^\circ} - 6.667e^{j60^\circ} = 11.547e^{-j150^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{AB2} = \dot{U}_{A2} - \dot{U}_{B2} = 3.333 - 3.333e^{j120^\circ} = 5.774e^{-j30^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{BC2} = \dot{U}_{B2} - \dot{U}_{C2} = 3.333e^{j120^\circ} - 3.333e^{-j120^\circ} = 5.774e^{j90^\circ}, B;$$

$$\dot{U}_{CA2} = \dot{U}_{C2} - \dot{U}_{A2} = 3.333e^{-j120^\circ} - 3.333e^{j0^\circ} = 5.774e^{-j150^\circ}, B. \quad (1.11)$$

Знайдемо графічно симетричні складові фазних та лінійних напруг (рис. 1.10).

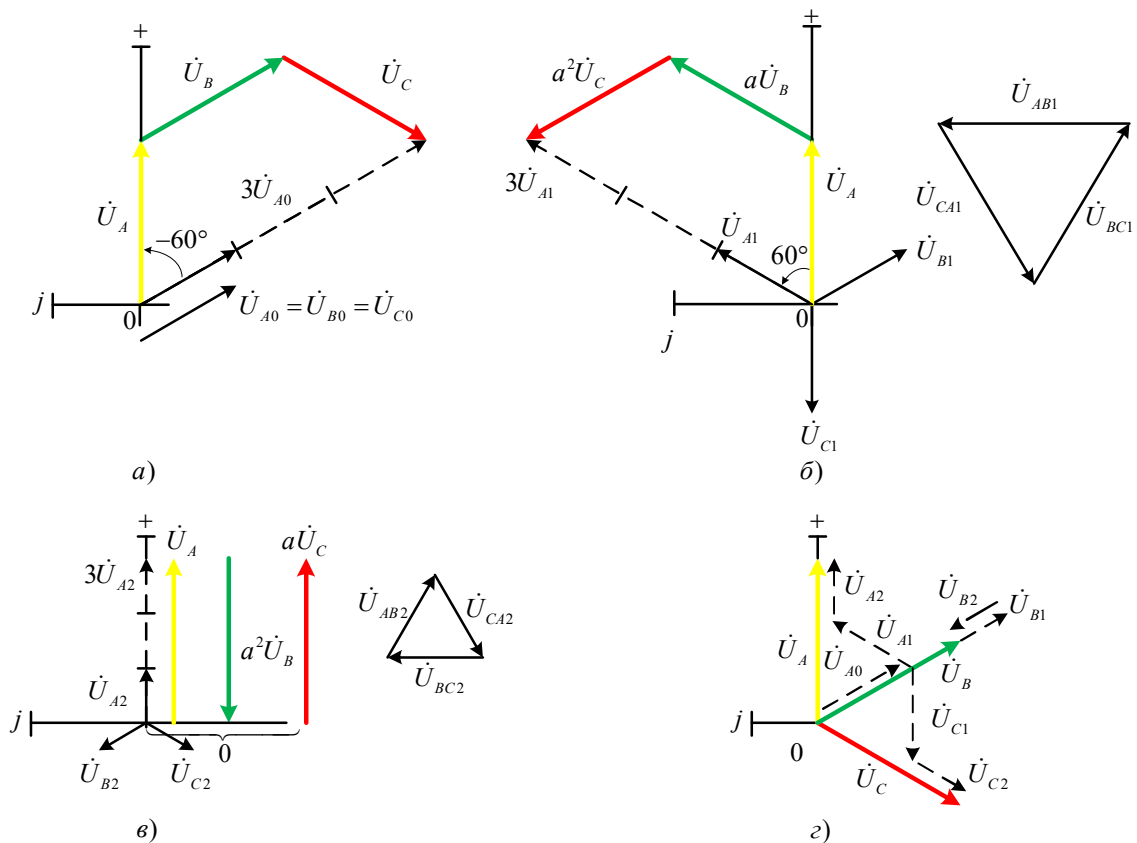


Рисунок 1.10 – Векторні діаграми ЕРС трифазних генератора напруг нульової (а), прямої (б), зворотної (в) послідовностей чергування фаз та заданої несиметричної системи (г)

Для дослідження несиметричної системи фазних напруг (рис. 1.9) за допомогою імітаційних моделей фільтрів симетричних складових у пакеті прикладних програм SimPowerSystems (Matlab) [6-7] та отримання досвіду перед виконанням лабораторної роботи необхідно зібрати схеми, що зображені на рис. 1.11, та провести математичне моделювання.

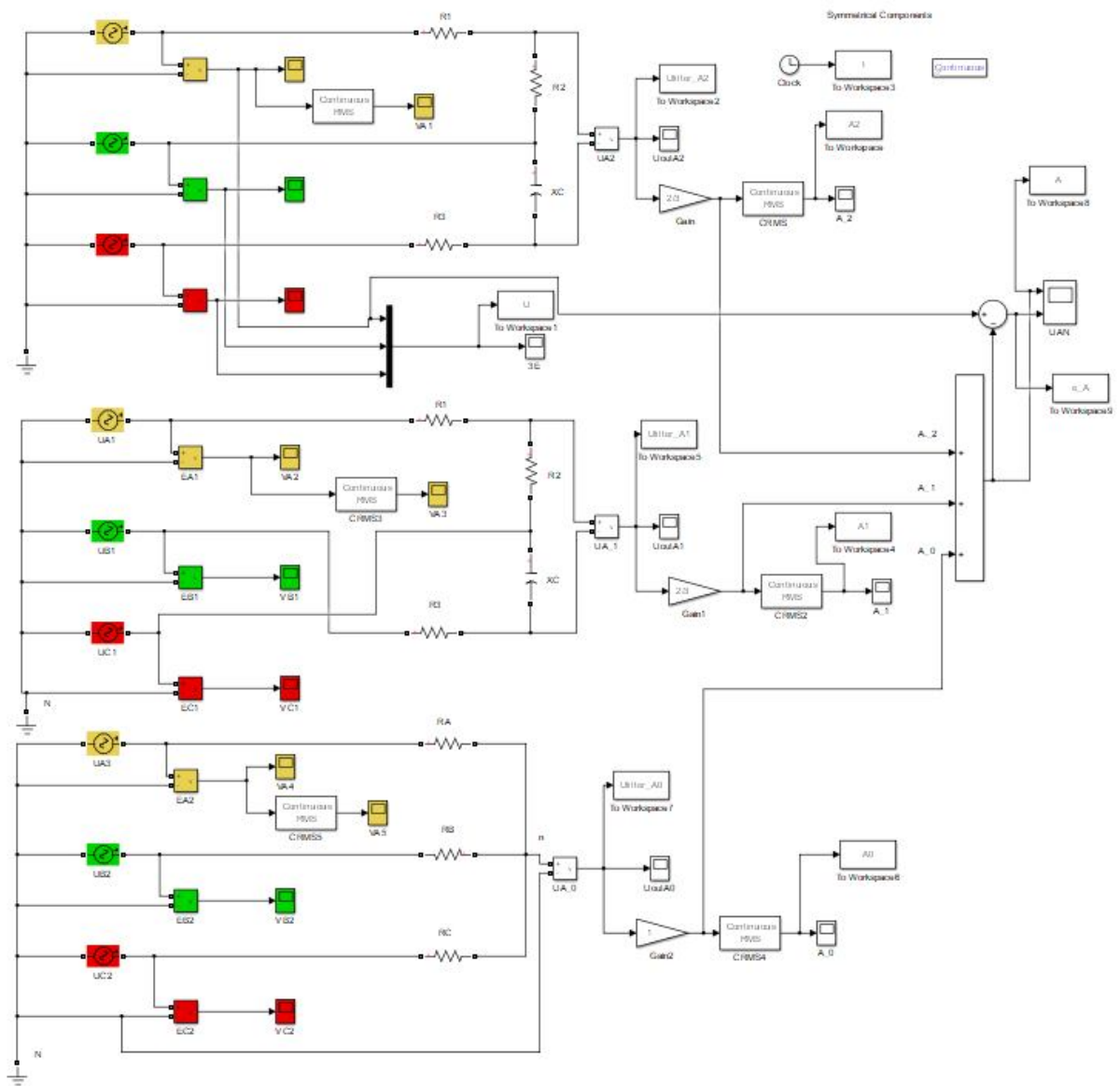


Рисунок 1.11 - Імітаційні моделі фільтрів симетричних складових

Використовуючи функції графічних вікон (Matlab), команди “plot” “grid” представимо миттєві значення ЕРС трифазного генератора (несиметричну систему фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$) на рис. 1.12. Де початкові фази ЕРС джерела напруги дорівнюють $\psi_A = 0, \psi_B = -60^\circ$ та $\psi_C = -120^\circ$ відповідно.

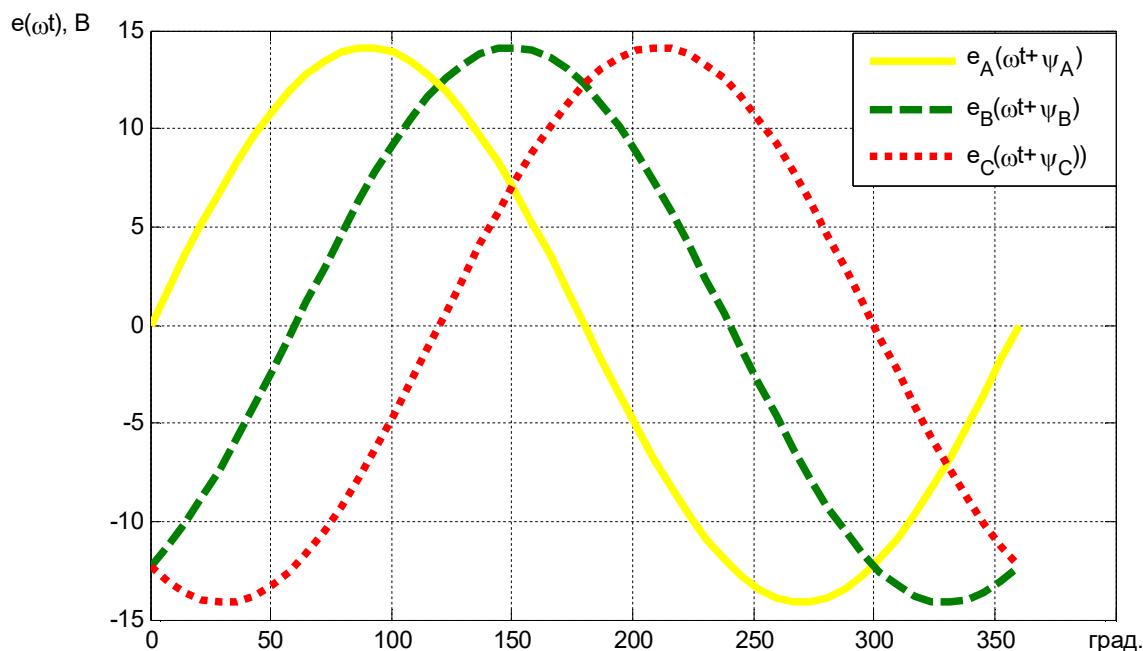


Рисунок 1.12 - Миттєві значення ЕРС трифазного генератора

З рис. 1.12 видно, що задане трифазне джерело напруги є несиметричним, оскільки три однакових за модулем вектори ЕРС \dot{E}_A , \dot{E}_B , \dot{E}_C не зсунуті один відносно одного на кут $2\pi/3$. На рис. 1.13 зобразимо миттєве значення фільтра зворотної складової напруг $u_{filterA2}(t)$ та діючі значення напруги зворотної складової U_{A2} за допомогою команди “plot(t,Ufilter_A2,t,A2), grid”. З виразу (1.9) для симетричних складових фазної напруги $\dot{U}_A \quad \dot{U}_{A2} = 3.333(B)$, що співпадає з результатами (діючим значенням) математичного моделювання 3.4 В.

Для представлення миттєвого значення фільтра прямої складової напруг $u_{filterA1}(t)$ та діючі значення напруги прямої складової U_{A1} на рис. 1.14 використаємо команди “plot(t,Ufilter_A1,t,A1), grid”. З виразу (1.9) $\dot{U}_{A1} = 6.667e^{j60^\circ}(B)$, тобто розраховане діюче значення співпадає з результатами моделювання 6.6 В.

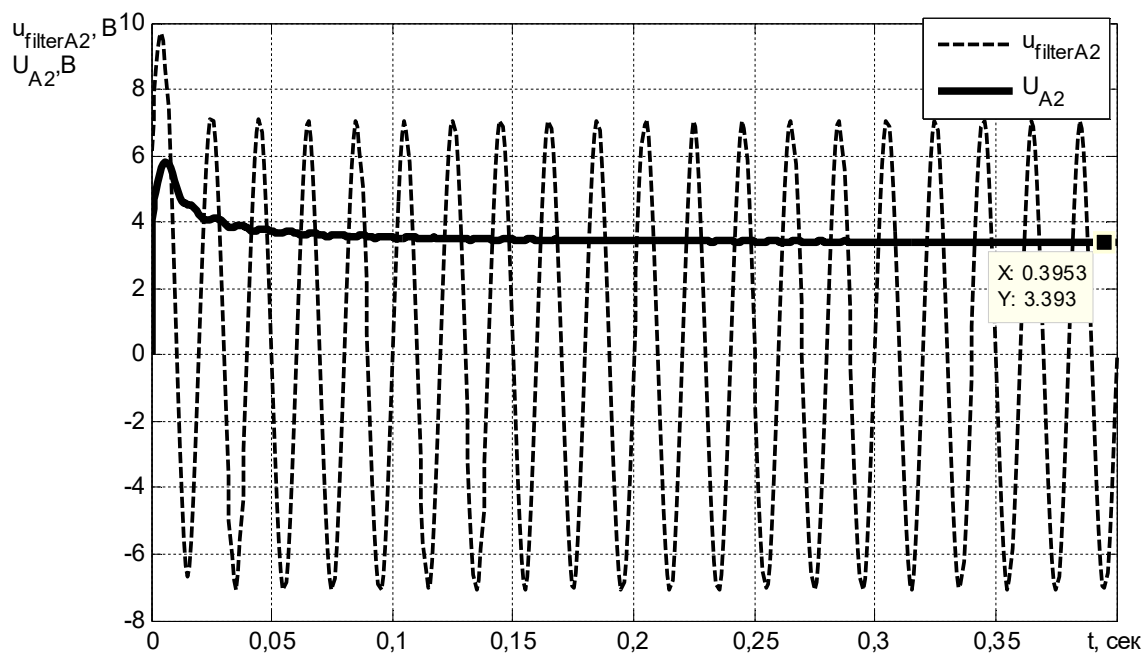


Рисунок 1.13 - Миттєве значення фільтра зворотної складової напруг $u_{\text{filterA2}}(t)$ та діючі значення напруги зворотної складової U_{A2}

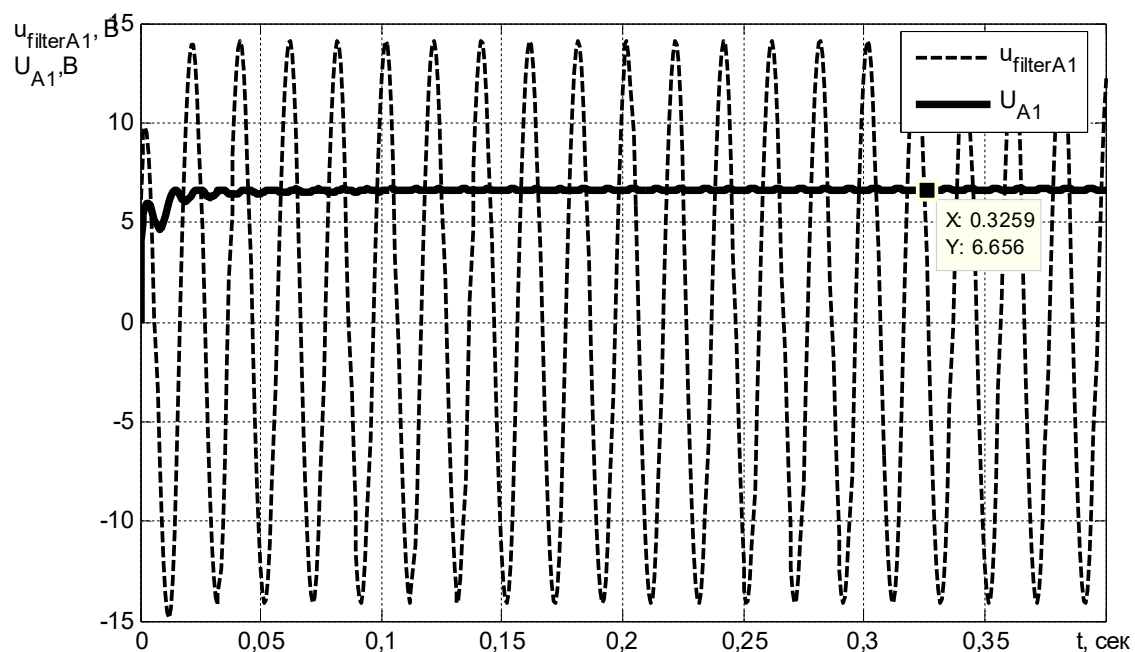


Рисунок 1.14- Миттєве значення фільтра прямої складової напруг $u_{\text{filterA1}}(t)$ та діючі значення напруги прямої складової U_{A1}

Миттєвого значення фільтра нульової складової напруг $u_{filterA0}(t)$ та діючі значення напруги нульової складової U_{A0} представлено на рис. 1.15 за допомогою команди “plot(t,Ufilter_A0,t,A0), grid”. З виразу (1.9) $\dot{U}_{A0} = 6.667e^{-j60^\circ}(B)$, тобто розраховане діюче значення співпадає з результатами моделювання 6.6 В.

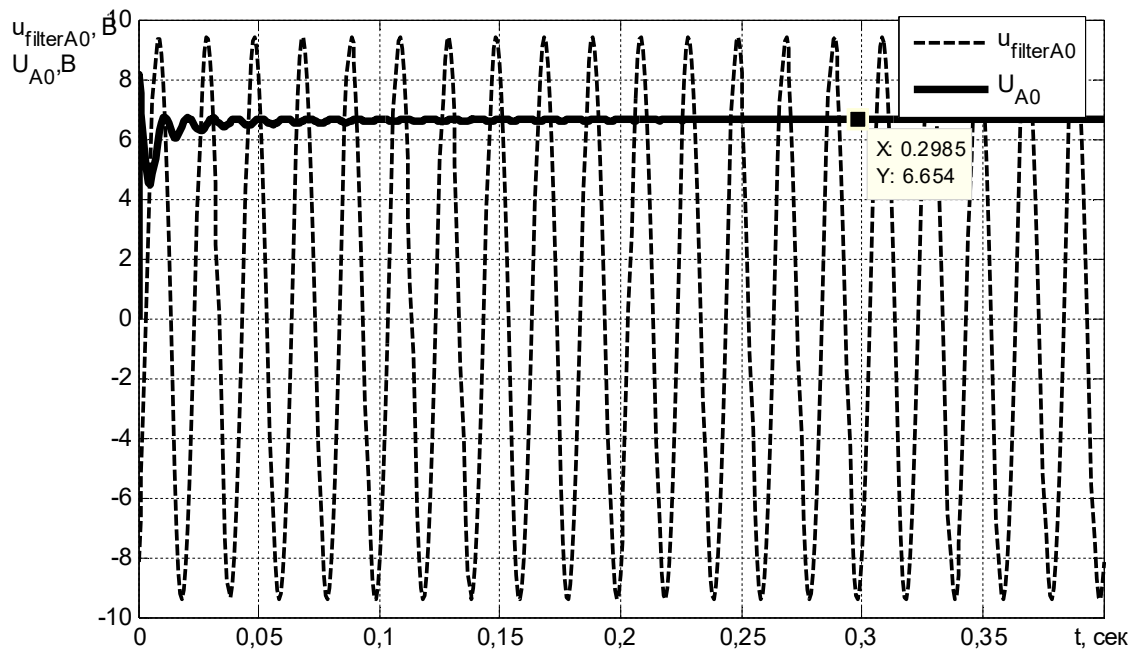


Рисунок 1.15- Миттєве значення фільтра нульової складової напруг $u_{filterA0}(t)$ та діючі значення напруги нульової складової U_{A0}

Перевіримо трифазну несиметричну систему векторів, яка розкладається на симетричні складові за рахунок додавання трьох показаних вище симетричних складових для фази \dot{A} . Визначимо абсолютну похибку Δ між заданою ЕРС \dot{A}_3 та визначеною за формулою (1.3) $\dot{A}_p = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0$

$$\Delta = A_3 - A_p, B \quad (1.12)$$

Для виведення графіків на рис. 1.16 застосуємо наступні команди
figure;
subplot(2,1,1);plot(t,A),grid

```
subplot(2,1,2);  
plot(t,e_A),grid
```

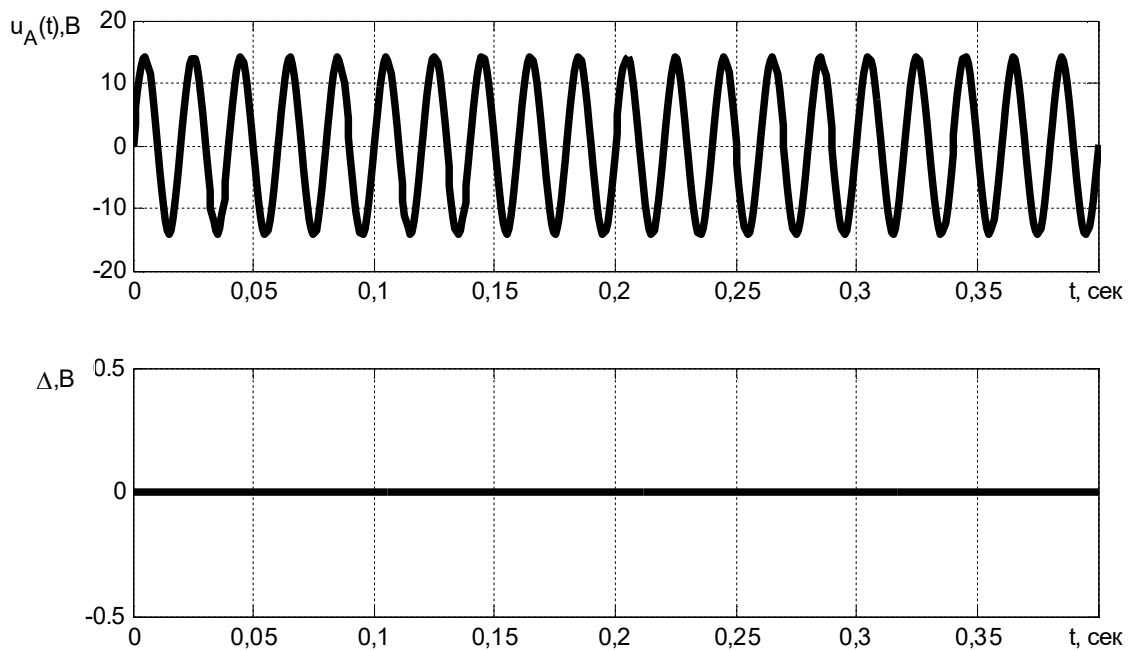


Рисунок 1.16 - Миттєве значення ЕРС фаза \dot{A} та абсолютна похибка Δ

Абсолютна похибка $\Delta = 0$, тому теоретичні положення підтверджуються результатами математичного моделювання. Тобто будь-яка трифазна несиметрична система векторів однозначно розкладається на симетричні складові.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Бойко В.С., Видолоб Ю.Ф. та інші Теоретичні основи електротехніки: підручник: У 3 т. / За заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. – К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2004. – Т.1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 276 с.
2. Щерба А.А. Лінійні електричні кола синусоїдального та періодичного несинусоїдного струму: навч. посіб./ А.А. Щерба А.А., І.А.

Курило, Є.А. Кудря, І.Н. Намацалюк, В.І. Чибеліс, Ю.В. Перетятко. – К.: Лазурит-Поліграф, 2012. – 248 с.

3. Перхач В.С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола: Підручник. – К: Вища школа., 1992. - 439 с.

4. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: Т1. Учебник. – Л.: Энергоиздат, 1981. - 536 с.

5. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей: учебник. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.

6. Островерхов М.Я. Моделювання електромеханічних систем в “Simulink”: навч. посібник для студентів вищих технічних закладів / М.Я. Островерхов, В.М. Пижов. – Київ: Фоліант, 2008. – 532 с.

7. Островерхов М.Я. Обчислювальна техніка та програмування-2: посібник до кредитного модуля для студентів напряму підготовки 6.050702 «Електромеханіка» спеціальності «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» / М.Я. Островерхов, С.О. Бур'ян – К.: НТУУ «КПІ», 2010, – 236 с.

8. Учебно-исследовательский лабораторный стенд УИЛС Паспорт и инструкция по эксплуатации УИЛС 1.00.00 ПС. – О.: «Одесский политехнический институт», 1982. – 11 с.

Лабораторна робота № 2

ДОСЛІДЖЕННЯ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ ОДНОРІДНОЇ ЛІНІЇ

Мета роботи: дослідити хвильові процеси в однорідних довгих лініях в усталених синусоїдних режимах, використовуючи методи математичного моделювання у пакеті прикладних програм MATHCAD.

Проаналізувати графіки розподілу діючих та миттєвих значень напруг (струмів) електричного кола з розподіленими параметрами для режимів неробочого ходу та короткого замикання, реактивного та активного навантаження, режиму узгодженого навантаження.

Тривалість роботи: 6 години.

1. Основні теоретичні відомості

Для електричного кола з розподіленими параметрами характерно те, що геометрична довжина цього кола співмірна з довжиною хвилі коливань електромагнітної енергії, яка передається уздовж кола. Тому струм $i(t,x)$ (напруга $u(t,x)$) для одного моменту часу у різних точках лінії буде неоднаковим, тобто буде функцією двох змінних – часу t та координати x , що вимірюється уздовж лінії [1-3]. *Методи розрахунку кіл з зосередженими параметрами виявляються неприйнятними, оскільки процеси, що виникають в колах з розподіленими параметрами, описуються рівняннями в частинних похідних.*

Представимо коло з розподіленими параметрами у вигляді двопровідної лінії, яка зображена на (рис. 2.1. а). Ліві затискачі є початком, а ті що знаходяться праворуч – кінцем лінії. Кожен елемент лінії dx (рис. 2.1. б) можна представити за допомогою *повздожніх* (індуктивність dL та опір dR) та *поперечних* (ємність dC та провідність dG) параметрів. *Повздожні* параметри характеризують явища, що пов'язані з магнітним полем, і втрати в опорах проводів, *поперечні* параметри враховують явища, які відбуваються в

електричному полі, та втрати що обумовлені недосконалістю ізоляції між проводами.

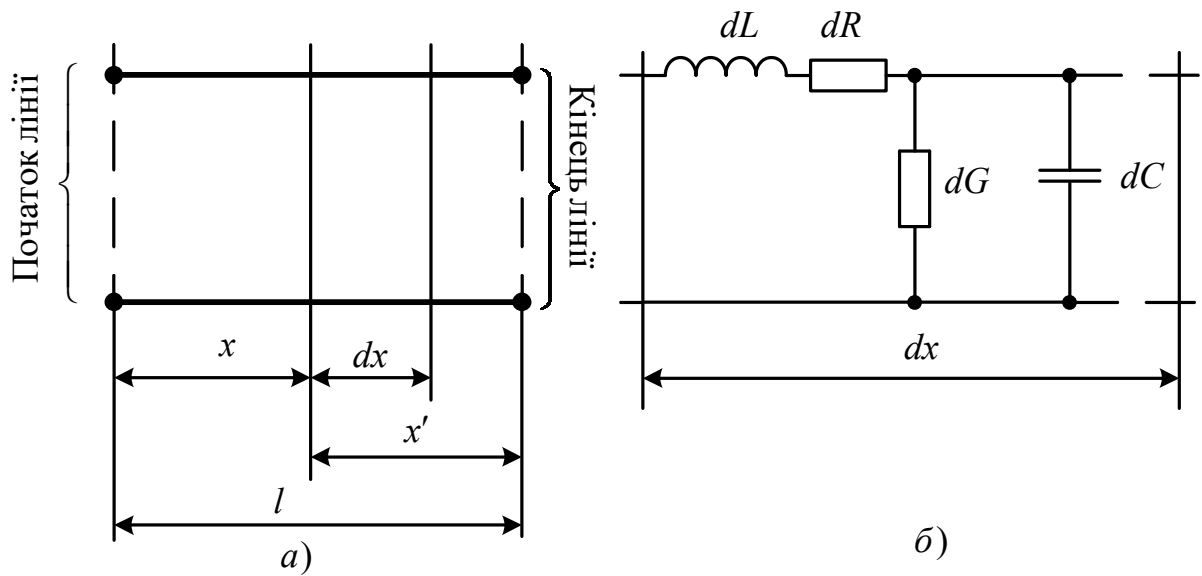


Рисунок 2.1 – Двопровідна лінія

Розглянемо теорію однорідної довгої лінії, відстань між проводами якої значно менша довжини електромагнітної хвилі. У однорідній лінії значення параметрів, що відносяться до одиниці її довжини (погоні параметри), є постійними $L_0 = \frac{dL}{dx} \left(\frac{\Gamma_n}{\text{км}} \right); C_0 = \frac{dC}{dx} \left(\frac{\Phi}{\text{км}} \right); R_0 = \frac{dR}{dx} \left(\frac{\text{Ом}}{\text{км}} \right); G_0 = \frac{dG}{dx} \left(\frac{C_m}{\text{км}} \right).$

У однорідній лінії усі параметри однакові вздовж усієї довжини лінії, а у неоднорідних лініях параметри можуть змінюватися.

Параметри трифазних ліній зазвичай наводяться для однієї фази. Загалом для n - провідної лінії передач, яка розташована у повітрі над землею, необхідно враховувати взаємну індуктивність між проводами, а також вплив землі. Для більш простого випадку двопровідної лінії передач вплив землі не враховують. Однорідна лінія є поширеним типом ліній, які використовуються у радіотехніці. На практиці часто нехтують втратами у лінії за рахунок активного опору проводів, струмів витоків через ізолятори та повітря. У цьому випадку розглядають лінію без втрат. На низьких частотах та при невеликій довжині лінії індуктивність та ємність будуть незначно

впливати і лінію можна вважати колом з зосередженими параметрами. Розмежування на коротку та довгу лінії пов'язані з частотою електромагнітного процесу на якій працює лінія.

Диференціальне рівняння напруг та струмів у довгій лінії

Розглянемо однорідну лінію, яка має розподілені за довжиною параметри $dL = L_0 dx$, $dC = C_0 dx$, $dR = R_0 dx$ та $dG = G_0 dx$. Лінію представимо у вигляді каскадного включення чотирьохполісників на рис. 2.2, у межах яких струми та напруги не залежать від відстані.

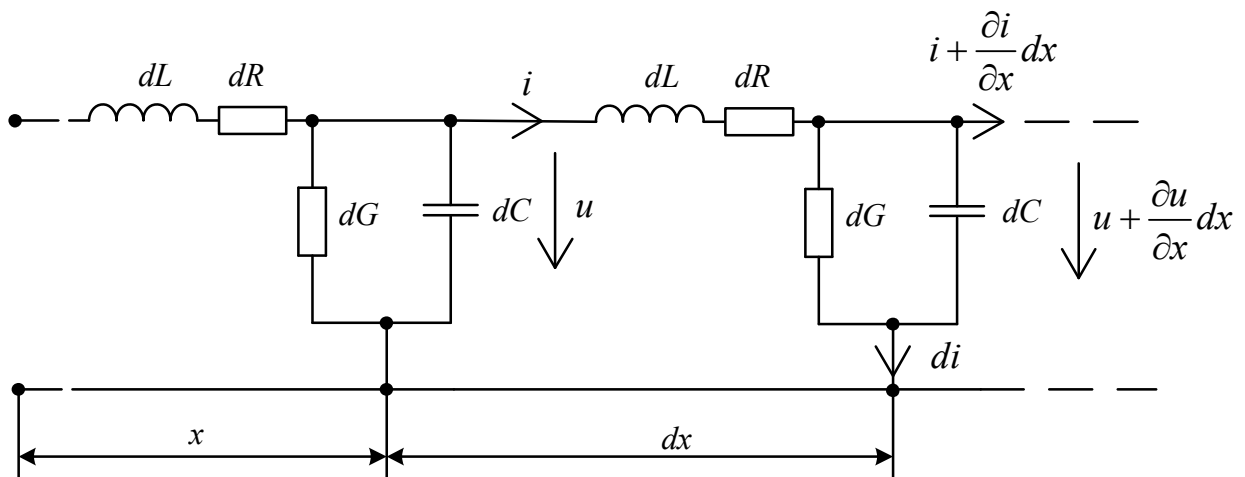


Рисунок 2.2 – Схема заміщення однорідної двопровідної лінії (каскадне підключення чотирьохполісників)

Складемо рівняння за законом Кірхгофа для елементарної ділянки dx , що знаходиться на відстані x від початку лінії. Якщо на початку ділянки dx вхідні величини u та i , та на початку наступної ділянки $x+dx$ струми та напруги дорівнюють $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ й $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Де $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ та $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ - приріст струму та напруги за шляхом dx . Так як $i(t, x)$ та $u(t, x)$, то і рівняння записується у часткових похідних.

За другим законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + \mathcal{U} + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \\ \text{або } \boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

За першим законом Кірхгофа

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx, \quad (2.2)$$

де $di = (u + \frac{\partial u}{\partial x}) G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$ - струм зміщення та струм провідності.

Нехтуючи складовими другого порядку, отримаємо

$$di = u G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Підставивши рівняння (2.3) у (2.2), знайдемо

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= u G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{U} + \frac{\partial i}{\partial x} dx, \\ \boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = u G_0 + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рівняння (2.1) та (2.4) називаються *рівняннями довгої лінії* (телеграфні рівняння). Вони справедливі за будь-якої зміни u та i у часі. Виключивши у цих рівняннях одну зі змінних, перейдемо до рівняння у часткових похідних другого порядку для напруг $u(t, x)$ чи струмів $i(t, x)$. Отримане рівняння повинне задовольняти двом початковим та двом граничним умовам. Початкові умови задаються шляхом розподілення напруги та струму за всією довжиною лінії у момент $t = 0$ у вигляді початкових функцій $u(0, x)$, $i(0, x)$, а у якості граничних умов функції часу на кінцях, що передає ($x = 0$) або приймає ($x = l$): $u(t, 0)$ та $u(t, l)$ або $i(t, 0)$ та $i(t, l)$.

Загалом систему вирішують за нульових початкових умов. Найбільш важливим є аналіз процесів у довгій лінії в усталеному режимі, коли струми та напруги є синусоїдними функціями.

Рішення рівнянь однорідної лінії під час усталеного синусоїдного режиму

Розглянемо випадок, коли на вхід лінії подано напругу $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Тоді у будь-якій точці лінії напруга та струм змінюватимуться за синусоїдним законом $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

У цьому випадку рішення рівняння (2.1) лінії

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= u G_0 + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

в усталеному режимі знаходять, використовуючи символічний (комплексний метод). Запишемо відповідність між миттєвими та комплексними значеннями співвідношень, що використовується у системі рівнянь (2.4)

$$\begin{aligned} u &\Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_m e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{U}_d e^{j\omega t}; \\ i &\Rightarrow \dot{I} = \dot{I}_m e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{I}_d e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial \dot{U}}{\partial t} = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega \sqrt{2} \dot{U}_d e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial i}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial \dot{I}}{\partial t} = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t} = j\omega \sqrt{2} \dot{I}_d e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{U}_m}{\partial x} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{I}_m}{\partial x} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здійснивши заміну в рівняннях (2.4) за співвідношеннями (2.5) та виконавши скорочення на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, отримаємо

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = R_0\dot{I} + j\omega L_0\dot{I} = \underline{Z}_0\dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = G_0\dot{U} + j\omega C_0\dot{U} = \underline{Y}_0\dot{U}. \end{cases} \quad (2.6)$$

де $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$, $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ - відповідно повздовжні та поперечні комплексні параметри лінії.

Вирішимо систему (2.6) відносно напруги \dot{U} та струму \dot{I} . Похідна від першого рівняння за x , при використанні другого рівняння, дає:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} &= \frac{d\dot{I}}{dx} = -\underline{Z}_0\underline{Y}_0\dot{U}, \\ \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \underline{Z}_0\underline{Y}_0\dot{U} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Вважаючи $\underline{Z}_0\underline{Y}_0 = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) = \gamma^2$, запишемо рішення рівняння (2.7) у вигляді

$$\boxed{\dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}}, \quad (2.8)$$

де $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$ - коефіцієнт поширення лінії; α - коефіцієнт згасання лінії; β - коефіцієнт фази лінії.

Рішення відносно струму \dot{I} отримаємо з рівняння (2.6) з урахуванням виразу (2.8)

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{1}{\underline{Z}_0} (\underline{\gamma} \underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{\gamma} \underline{A}_2 e^{\gamma x}). \quad (2.9)$$

Перепишемо рівняння (2.8) та (2.9)

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \\ \dot{I} &= \frac{1}{\underline{Z}_0} (\gamma \underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \gamma \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}).\end{aligned}\quad (2.10)$$

де $\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_0}{\gamma} = \underline{Z}_\lambda$ - хвильовий опір.

Припускаючи, що на початку лінії ($x=0$) напруга $\dot{U} = \dot{U}_1$ та $\dot{I} = \dot{I}_1$, з рівнянь (2.10) знайдемо довільні сталі \underline{A}_1 та \underline{A}_2 (визначаються з граничних умов)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \underline{Z}_C \dot{I}_1 = \underline{A}_1 - \underline{A}_2; \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\underline{A}_1 = 0.5(\dot{U}_1 + \underline{Z}_C \dot{I}_1), \quad \underline{A}_2 = 0.5(\dot{U}_1 - \underline{Z}_C \dot{I}_1).$$

З урахуванням (2.11) рівняння (2.10) для струмів та напруг у будь-якій точці лінії ($x \neq 0$) можна записати

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \underline{Z}_C \dot{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \underline{Z}_C \dot{I}_1) e^{\gamma x} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi; \\ \dot{I} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_C \dot{I}_1}{\underline{Z}_C}) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_C \dot{I}_1}{\underline{Z}_C}) e^{\gamma x} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi. \end{cases} \quad (2.12)$$

У рівняннях (2.10), (2.12) перші доданки визначають комплекси діючих значень напруги та струму прямої (падаючої) хвилі U_φ , а другі доданки – комплекси діючих значень напруги та струму відбитої хвилі U_ψ . Вирази для напруги та струму у будь-якій точці ліній можна записати в іншій формі

$$\begin{aligned} \frac{(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})}{2} &= ch(\gamma x); \quad \frac{(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})}{2} = sh(\gamma x); \\ \begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 ch(\gamma x) - \dot{I}_1 \underline{Z}_C sh(\gamma x); \\ \dot{I} = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_C} sh(\gamma x) + \dot{I}_1 ch(\gamma x). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Значення струму та напруги в кінці лінії визначається при $x = l$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 ch(\underline{\gamma}l) - \dot{I}_1 \underline{Z}_c sh(\underline{\gamma}l); \\ \dot{I} = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} sh(\underline{\gamma}l) + \dot{I}_1 ch(\underline{\gamma}l). \end{cases} \quad (2.14)$$

У рівняннях (2.13) та (2.14) під аргументом синуса та косинуса стоїть комплексне число $\underline{\gamma}x = \alpha x + j\beta x$. У цьому випадку гіперболічні функції обраховують при $\alpha \neq 0$. Напругу та струм у будь-якій точці лінії можна визначити за відомим струмом \dot{I}_2 та напругою \dot{U}_2 в кінці лінії. Відлік відстані краще також починати від кінця лінії. Якщо замінити у рівнянні (2.10) $x = l - x'$ (рис. 2.1 а), отримаємо

$$\begin{cases} \dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}l} e^{\underline{\gamma}x'} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}l} e^{-\underline{\gamma}x'} = \underline{A}_3 e^{\underline{\gamma}x'} + \underline{A}_4 e^{-\underline{\gamma}x'}; \\ \dot{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_3 e^{\underline{\gamma}x'} - \underline{A}_4 e^{-\underline{\gamma}x'}). \end{cases} \quad (2.15)$$

Припускаючи ($x' = 0$), отримаємо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4; \\ \underline{Z}_c \dot{I} = \underline{Z}_c \dot{I}_2 = \underline{A}_3 - \underline{A}_4; \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\underline{A}_3 = 0.5(\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2), \underline{A}_4 = 0.5(\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2).$$

Струм та напруга у будь-якому перетині лінії за рівнянням (2.16) дорівнюють

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2) e^{\underline{\gamma}x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2) e^{-\underline{\gamma}x'} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi; \\ \dot{I} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2}{\underline{Z}_c}) e^{\underline{\gamma}x'} - \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2}{\underline{Z}_c}) e^{-\underline{\gamma}x'} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi. \end{cases} \quad (2.17)$$

Ці рівняння з використанням гіперболічних синусів та косинусів приймуть вигляд

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 ch(\underline{\gamma}x') + \dot{I}_2 \underline{Z}_c sh(\underline{\gamma}x'); \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} sh(\underline{\gamma}x') + \dot{I}_2 ch(\underline{\gamma}x'). \end{cases} \quad (2.18)$$

Рівняння (2.17) та (2.18) дозволяють визначити напругу та струм у будь-якій точці лінії. Символічний метод дозволяє простіше вирішити диференціальне рівняння, оскільки змінна t входить у комплексні вирази у неявній формі.

Миттєве значення струму та напруги у будь-якій точці лінії завжди можна обрахувати за уявною частиною комплексів \dot{U} та \dot{I}

$$u = \text{Im}[\dot{U}\sqrt{2}e^{j\omega t}]; i = \text{Im}[\dot{I}\sqrt{2}e^{j\omega t}]. \quad (2.19)$$

Якщо порівняти рівняння (2.13) та (2.18) з рівнянням чотириполіусника, то можна побачити аналогію. Заміна лінії еквівалентним чотириполіусником можлива у тому випадку, якщо необхідно знати напругу та струм на початку та кінці лінії ($x=0, x=l$), що дозволяє розглядати лінію як однорідну схему кінцевого числа чотириполіусників або навіть як деякий еквівалентний чотириполіусник, у якого сталі відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= ch(\underline{\gamma}l); \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c sh(\underline{\gamma}l); \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\underline{Z}_c} sh(\underline{\gamma}l); \underline{A}_{22} = ch(\underline{\gamma}l). \end{aligned} \quad (2.20)$$

причому, для будь-якого чотириполіусника

$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = ch^2(\underline{\gamma}l) - sh^2(\underline{\gamma}l) = 1$. Лінія з розподіленими параметрами у цьому випадку може бути представлена Т- або П – подібною схемою заміщення симетричного чотириполіусника. При дослідженні процесів у лінії її моделюють каскадною схемою з достатнім числом ланок.

Падаючі та відбиті хвилі у лінії

Щоб знати, як змінюється напруга та струм уздовж лінії у різні моменти часу, розглянемо рівняння довгої лінії

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}; \\ \dot{I} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\underline{\gamma}x}; \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\underline{A}_1 = \dot{U}_\varphi = U_\varphi e^{j\varphi}, \underline{A}_2 = \dot{U}_\psi = U_\psi e^{j\psi}, \underline{Z}_C = Z_C e^{j\Theta},$$

а також враховуючи, що $\gamma = \alpha + j\beta$, миттєві значення напруги та струмів

$$\begin{aligned} u &= \text{Im}[\dot{U} \sqrt{2} e^{j\omega t}] = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = U_{m\varphi} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi - \beta x) + \\ &+ U_{m\psi} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi + \beta x); \\ i &= \text{Im}[\dot{I} \sqrt{2} e^{j\omega t}] = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi = I_{m\varphi} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi - \Theta - \beta x) - \\ &- I_{m\psi} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi - \Theta + \beta x), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{де } U_{m\varphi} = \sqrt{2} U_\varphi; U_{m\psi} = \sqrt{2} U_\psi; I_{m\varphi} = \frac{\sqrt{2} U_\varphi}{Z_C}; I_{m\psi} = \frac{\sqrt{2} U_\psi}{Z_C}.$$

Таким чином, при фіксованих x напруга та струм у будь-якій точці лінії є сумою двох синусоїдних функцій часу: падаючої та відбитої хвиль.

Розподіл у часі падаючої хвилі для двох фіксованих значень $x_1 = 0$ та $x_2 \neq 0$ для випадку $\varphi = 0$ показано на рис. 2.3

$$u_\varphi = U_{m\varphi} e^{-\alpha x_1} \sin(\omega t - \beta x_1) \Big|_{x_1=0} = U_{m\varphi} \sin(\omega t), u_\varphi = U_{m\varphi} e^{-\alpha x_2} \sin(\omega t - \beta x_2) \Big|_{x_2 \neq 0}.$$

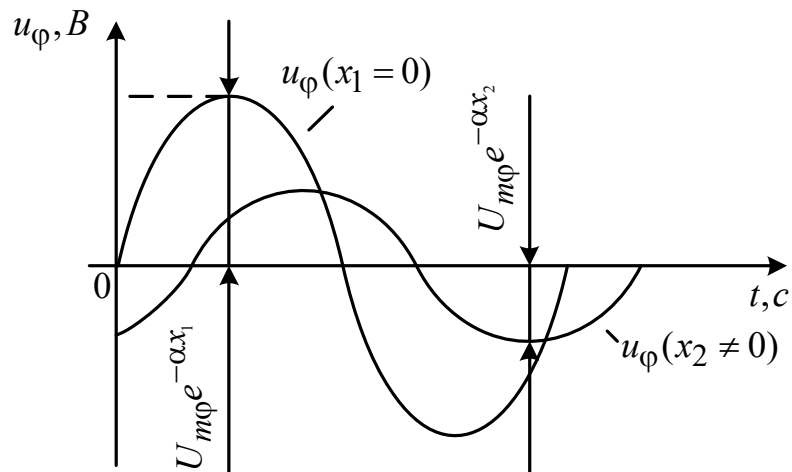


Рисунок 2.3 – Миттєві значення падаючої хвилі

Як видно з графіків, амплітуда падаючої хвилі для $x_2 \neq 0$ є меншою за амплітуду при $x_1 = 0$. Зменшення амплітуди обумовлене втратами в лінії у повздовжніх та поперечних вітках, що у рівняннях позначається коефіцієнтом $e^{-\alpha x}$. Спотворення за фазою обумовлено коефіцієнтом фази $\beta \neq 0$.

Розподіл напруги падаючої хвилі уздовж лінії отримаємо для фіксованого моменту часу t при $t_1 = 0$ та $t_2 \neq 0$ для випадку $\varphi = 0$ представлено на рис. 2.4.

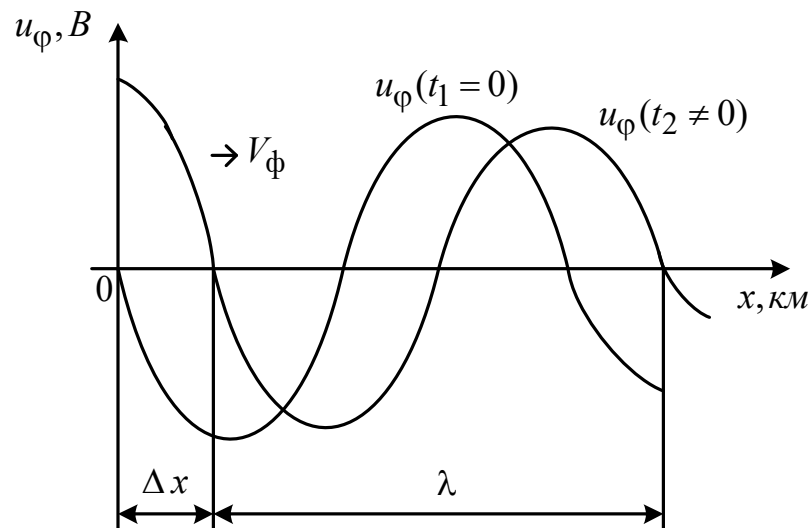


Рисунок 2.4 – Миттєві значення падаючої хвилі залежності від відстані x

Як видно, падаюча хвиля поширюється від джерела ($x = 0$) до споживача з деякою швидкістю V_ϕ , яку можна визначити з умови рівності фази для моментів часу t_1 та $t_2 = t_1 + \Delta t$, тобто

$$\omega t_1 - \beta x_1 = \omega t_2 - \beta x_2 = \omega(t_1 + \Delta t) - \beta(x_1 + \Delta x), \text{ звідки } \omega \Delta t = \beta \Delta x \text{ або } \frac{\omega}{\beta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ що}$$

в границі $V_\phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$ дає швидкість поширення електромагнітної

хвилі (*фазова швидкість*). Такого роду хвилі зуться *біжучими*. Наявність множника $e^{-\alpha x}$ показує, що амплітуда хвилі під час її руху уздовж лінії згасає

за показниковим законом. Оскільки фаза напруги змінюється зі зміною x , коефіцієнт β , який характеризує цю зміну фази, називається *коефіцієнтом фази*. Літерою λ позначають довжину хвилі напруги, що дорівнює відстані між найближчими точками, у яких фази напруг u_ϕ відрізняються на 2π .

Відповідно, $(\omega t_2 - \beta x) - (\omega t_2 - \beta(x + \lambda)) = 2\pi$, звідси

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega} V_\phi = \frac{V_\phi}{f} = V_\phi T.$$

Отримані співвідношення показують зв'язок між довжиною хвилі та коефіцієнтом фази, фазовою швидкістю. Для прикладу лінія передач при $V_\phi = 300000$ км/с та частоті $f = 50$ Гц має довжину хвилі $\lambda = 300000/50 = 6000$ км, а при частоті $f = 3 \cdot 10^9$ Гц $\lambda = 10$ см. Аналогічний характер має падаюча хвиля струму. Дослідження відбитих хвиль показують, що зворотні хвилі напруги та струму рухаються за напрямком, протилежним напрямку прямої хвилі. Це відображається протилежним знаком у фазовій швидкості відбитої хвилі $V_{\phi_{зв}} = -\frac{\omega}{\beta} = -V_\phi$.

Для відбитих хвиль $e^{\gamma x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x}$, тобто вони під час руху від кінця до початку лінії згасають. Таким чином, при синусоїдних напругах та струмах на початку або в кінці лінії у будь-якій точці лінії, у загальному випадку $Z_2 \neq Z_C$ існують дві електромагнітні хвилі: падаюча та відбита, які рухаються назустріч одна іншій, причому кожна із цих хвиль згасає за напрямком руху.

Коефіцієнти відбиття, вхідний опір та інші характеристики лінії

При розрахунку різних режимів роботи лінії передач вводять різні коефіцієнти, які характеризують як природні властивості лінії, так і особливості досліджуваного кола та навантаження. У будь-якій точці лінії відношення напруги до струму прямої хвилі представляє хвильовий опір

$\underline{Z}_C = \frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi}$ та, відповідно для зворотних хвиль, дорівнює $\underline{Z}_C = \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi}$. Хвильовий

опір лінії з втратами $\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) / (G_0 + j\omega C_0)} = Z_C e^{j\Theta}$. Для лінії постійного струму ($\omega = 0$) $\underline{Z}_C = \sqrt{R_0 / G_0}$, а при дуже високій частоті ($\omega \rightarrow \infty$) $\underline{Z}_C = \sqrt{L_0 / C_0}$. Для цих випадків \underline{Z}_C дійсне число ($\Theta = 0$).

У реальних повітряних лініях величина хвильового опору складає 300-400 Ом, а для кабельних ліній вона менше, оскільки ємність кабельної лінії більша, ніж повітряної, та дорівнює 50-100 Ом. Зазвичай як для кабелів, так і для повітряних ліній $\frac{R_0}{G_0} > \frac{L_0}{C_0}$. Зміна падаючих та відбитих хвиль у лінії за

модулем та фазою характеризує коефіцієнт поширення $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$. Величина α характеризує зміну амплітуди хвилі, а β - зміну фази на одиницю довжини лінії. Згасання амплітуди хвилі вдовж лінії обумовлено наявністю втрат у лінії, а зміна фази – кінцевою швидкістю поширення хвиль. Для лінії постійного струму ($\omega = 0$) $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$, $\beta = 0$, а для лінії з малими втратами $R_0 \approx 0$, $G_0 \approx 0$ або лінії, яка працює на високих частотах ($\omega \rightarrow \infty$), $\alpha = 0$, $\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}$.

Зворотні відбиті хвилі можна розглядати як результат відбиття прямих хвиль від кінця лінії. З рівнянь лінії (2.17)

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2)e^{\underline{\gamma}x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2)e^{-\underline{\gamma}x'} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi; \\ \dot{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C}\right)e^{\underline{\gamma}x'} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C}\right)e^{-\underline{\gamma}x'} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi. \end{cases}$$

при $x' = 0$ маємо на кінці лінії

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_{\varphi 2} + \dot{U}_{\psi 2} = \dot{U}_{\varphi 2} \left(1 + \frac{\dot{U}_{\psi 2}}{\dot{U}_{\varphi 2}}\right) = \dot{U}_{\varphi 2} (1 + \tilde{n}); \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{\varphi 2} - \dot{I}_{\psi 2} = \dot{I}_{\varphi 2} \left(1 - \frac{\dot{I}_{\psi 2}}{\dot{I}_{\varphi 2}}\right) = \dot{I}_{\varphi 2} (1 - \tilde{n}). \end{cases} \quad (2.23)$$

де

$$\tilde{n} = \frac{\dot{U}_{\psi 2}}{\dot{U}_{\varphi 2}} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\dot{I}_2} \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2} = \boxed{\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_C}}, \quad \tilde{n} = \frac{\dot{I}_{\psi 2}}{\dot{I}_{\varphi 2}} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C} \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2}$$

- коефіцієнт відбиття.

Коефіцієнт відбиття це комплексне число, яке характеризує відношення модулів напруг (струмів) відбитої та падаючої хвилі на кінці лінії, а аргумент – фазовий зсув між ними. Модуль коефіцієнта відбиття не може бути більшим за одиницю, в іншому випадку величина відбитої хвилі буде перевищувати величину падаючої хвилі. Величина аргументу залежно від навантаження може змінюватися в межах від $-\pi$ до π . Наприклад, при неробочому ході лінії (лінія розімкнена) ($\underline{Z}_2 \rightarrow \infty$) коефіцієнт відбиття $\tilde{n} = 1$. Це означає, що хвиля напруги відбивається без зміни $\dot{U}_2 = \dot{U}_{\varphi 2} (1 + \tilde{n})$, а відбита хвиля струму змінює знак $\dot{I}_2 = \dot{I}_{\varphi 2} (1 - \tilde{n})$. Для випадку короткого замикання на кінці лінії ($\underline{Z}_2 = 0$) коефіцієнт відбиття $\tilde{n} = -1$, тобто хвиля напруги відбивається зі зміною знаку, а хвиля струму – без зміни знаку.

Якщо навантажити лінію на опір, який дорівнює хвильовому ($\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$), то $\tilde{n} = 0$, тобто у лінії будуть відсутні відбиті хвилі.

Відношення комплексу напруги до комплексу струму на вході лінії визначає вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \text{ch}(\gamma l) + \dot{I}_2 \underline{Z}_C \text{sh}(\gamma l)}{\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\gamma l) + \dot{I}_2 \text{ch}(\gamma l)} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_C \text{th}(\gamma l)}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_2 \text{th}(\gamma l)} = \underline{Z}_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}}. \quad (2.24)$$

Вхідний опір лінії передачі є комплексним числом та залежить від її довжини та параметрів, частоти прикладеної напруги та навантаження.

У режимі неробочого ходу ($\underline{Z}_2 \rightarrow \infty$) вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх_нх}} = \underline{Z}_C \frac{1}{\text{th}(\gamma l)} = \underline{Z}_C \text{cth}(\gamma l), \quad \text{а при короткому замиканні } (\underline{Z}_2 = 0)$$

$\underline{Z}_{\text{вх_кз}} = \underline{Z}_C \text{th}(\gamma l)$. З урахуванням $\underline{Z}_{\text{вх_нх}}$ та $\underline{Z}_{\text{вх_кз}}$ вхідний опір можна записати у вигляді

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{вх_нх}} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{вх_кз}}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{вх_нх}}}. \quad (2.25)$$

Вхідний опір може змінюватися у широких межах від 0 до ∞ , причому характер опору може бути різним (активним, індуктивним та ємнісним). Це залежить від режиму роботи лінії (\underline{Z}_2) та її довжини. У реальних лініях вхідний опір ніколи не знижується до нуля та не досягає нескінченно великого значення.

Узгоджений режим роботи лінії

Розглянемо роботу лінії, яка навантажена на хвильовий опір $\underline{Z}_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = \underline{Z}_C$. Припустимо, що відомі l , \underline{Z}_C , \dot{U}_2 , \dot{I}_2 . Необхідно знайти як розподіляються \dot{U} , \dot{I} , $\underline{Z}_{\text{вх}}$, u , i , $\eta = P_2 / P_1$. Під час аналізу використаємо рівняння (2.17)

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2) e^{\gamma x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2) e^{-\gamma x'} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi; \\ \dot{I} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C} \right) e^{\gamma x'} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C} \right) e^{-\gamma x'} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi. \end{cases}$$

При $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$, $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_C$ рівняння (2.17) прийме вигляд

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2) e^{\gamma x'} = \frac{1}{2} \dot{U}_2 (1 + \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_2}) e^{\gamma x'} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'}; \\ \dot{I} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C}) e^{\gamma x'} = \dot{I}_2 e^{\gamma x'}. \end{cases} \quad (2.26)$$

У режимі узгодження (природній режим) відбитих хвиль немає $\tilde{n} = 0$, у лінії існують лише падаючі хвилі, вся енергія, що передається від джерела до споживача, повністю споживається на навантаженні.

Враховуючи, що $\underline{Z}_C = Z_C e^{j\vartheta} = Z_2 e^{j\varphi_2}$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'} = \dot{U}_2 e^{\alpha x'} e^{j\beta x'}; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\alpha x'} e^{j(\varphi_2 + \beta x')}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Звідки діюче значення напруги та струму у будь-якій точці лінії

$$\begin{cases} U = U_2 e^{\alpha x'}; \\ I = I_2 e^{\alpha x'}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Графіки діючих значень напруг та струмів уздовж лінії представляють експоненціальні функції, що збільшуються з кінця до початку (рис. 2.5). При довжині лінії $l \ll \lambda$ це будуть практично відрізки прямих. З виразу (2.27) вхідний опір усієї лінії ($x' = l$)

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_2, \quad (2.29)$$

а так як $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$, то $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_C$.

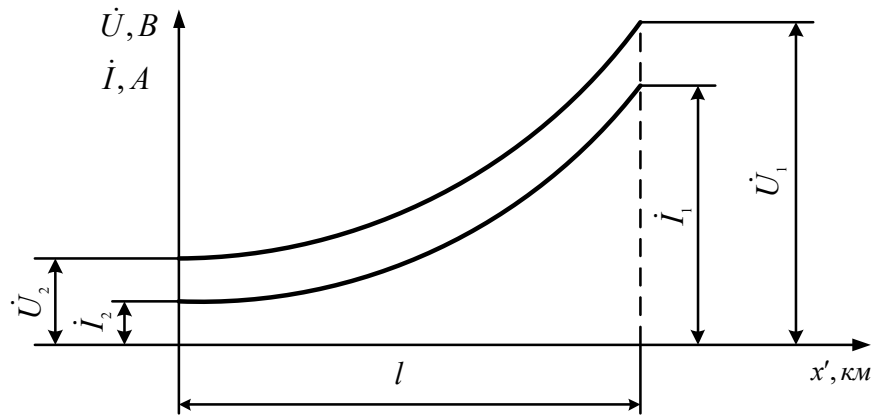


Рисунок 2.5 – Графіки діючих значень напруг та струмів при узгодженому навантаженні

Переходячи до миттєвих значень, з (2.27) отримаємо

$$\begin{cases} u = \text{Im}[\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}] = U_{2m}e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x'); \\ i = \text{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}] = I_{2m}e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x' + \varphi_2). \end{cases} \quad (2.30)$$

Миттєві значення напруги та струму у будь-який момент часу представляють собою біжучі (падаючі) хвилі, що рухаються від початку до кінця лінії (2.30).

Для повітряної лінії передачі характеристичний опір $\underline{Z}_c = Z_c e^{j\Theta} \approx Z_c$, тобто є чисто активним опором. Тоді узгоджене навантаження також повинне бути активним, тобто $\varphi_2 = \Theta = 0$. Виходить, що u та i будуть збігатися між собою за фазою, а при малих втратах у лінії ($\alpha = 0$) амплітуди їх будуть незмінними.

Режим біжучої хвилі є ідеальним з погляду економічності та технічної зручності передачі енергії по лінії.

Середня потужність у будь-якій точці лінії

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = U_2 I_2 e^{2\alpha x'} \cos(\Theta) = \frac{U_2^2}{Z_2} e^{2\alpha x'} \cos(\Theta) \quad (2.31)$$

залежить від U_2^2 , тобто чим більша напруга, тим більша потужність, що передається.

Коефіцієнт корисної дії лінії (ККД) визначається за співвідношенням:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2 \cos(\Theta)}{U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos(\Theta)} = e^{-2\alpha l}, \quad (2.32)$$

тобто її довжиною та параметрами. У режимі $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$, η буде найбільшим, згасання $\alpha l = 1$ при $\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2}$, тобто $P_1 = P_2 e^2$. За нормами згасання допускається біля 3.3 непера.

У загальному випадку згасання лінії визначається за виразом

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (2.33)$$

Узгодження параметрів лінії та навантаження часто застосовують у пристроях зв'язку, оскільки ця умова дозволяє передавати максимально можливу потужність.

Лінія без втрат

Процеси у реальних лініях зазвичай досліджуються за рівняннями

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2)e^{\underline{\gamma}x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2)e^{-\underline{\gamma}x'} = \dot{U}_2 ch(\underline{\gamma}x') + \dot{I}_2 \underline{Z}_C sh(\underline{\gamma}x'); \\ \dot{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C}\right)e^{\underline{\gamma}x'} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_C \dot{I}_2}{\underline{Z}_C}\right)e^{-\underline{\gamma}x'} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} sh(\underline{\gamma}x') + \dot{I}_2 ch(\underline{\gamma}x'). \end{cases} \quad (2.34)$$

розрахунок за якими має деяку складність.

У радіотехнічних колах, що працюють на високих частотах або на коротких лініях промислової частоти $\omega L_0 \gg R_0$ та $\omega C_0 \gg G_0$. Тому з метою спрощення математичних розрахунків за цих умов приймають $R_0 = 0, G_0 = 0$, тобто нехтують втратами у лінії. Це значно спрощує розрахунок лінії, не втрачаючи сутності процесу.

За умови $R_0 = 0$ та $G_0 = 0$ отримаємо: $\alpha = 0$, $\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{L_0C_0}$,

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c \quad - \quad \text{активний опір (не залежить від частоти),}$$

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} \quad - \quad \text{як і у лінії без спотворень,}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{f\sqrt{L_0C_0}}.$$

Тоді рівняння (2.34) прийме вигляд та буде називатися рівнянням ідеальної лінії передачі

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2)e^{\underline{\gamma}x'} \mp \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2)e^{-\underline{\gamma}x'} = \dot{U}_2 e^{\underline{\gamma}x'}; \\ \dot{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2}{\underline{Z}_c}\right)e^{\underline{\gamma}x'} = \dot{I}_2 e^{\underline{\gamma}x'}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Вважаючи що $\dot{U}_2 = \dot{U}_2$ та $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}$, з виразу (2.35) для миттєвих значень напруги та струму отримаємо

$$\boxed{\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x') + j \dot{I}_2 \underline{Z}_c \sin(\beta x'); \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin(\beta x') + \dot{I}_2 \cos(\beta x'). \end{cases}} \quad (2.36)$$

З систем (2.35) та (2.36) можна знайти розподіл діючих значень напруги та струму у будь-якій точці лінії, співвідношення між вхідними та вихідними величинами.

Як приклад приведемо співвідношення між величинами напруг та струмів для лінії різної довжини.

Довжина лінії $l = \lambda / 4$. Тоді рівняння (2.35) для початку лінії ($x' = l$, $\beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$) отримаємо $\dot{U}_1 = j \dot{I}_2 \underline{Z}_c$, $\dot{I}_1 = j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c}$, тобто напруга на

вході лінії пропорціональна струму на навантажені, а струм на вході лінії пропорціональний напрузі на навантажені.

Довжина лінії $l = \lambda / 2$. У цьому випадку $\beta \cdot l = \pi$ та $\dot{U}_1 = -\dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$, тобто величини струмів та напруг на початку та в кінці лінії співпадають за величиною, але протилежні за знаком.

Вхідний опір лінії без втрат у загальному випадку є комплексним числом, яке залежить від параметрів лінії, її довжини та навантаження, визначається за формулою

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_c \operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{tg}(\beta l)}. \quad (2.37)$$

Робота лінії без втрат у режимі неробочого ходу. Стоячі хвилі

Для розімкненої на кінці лінії ($\underline{Z}_2 \rightarrow \infty$) $I_2 = 0$. Рівняння ідеальної лінії (2.36) прийме вигляд

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x'); \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin(\beta x'). \end{cases} \quad (2.38)$$

Миттєве значення при $\dot{U}_2 = U_2$, $\underline{Z}_c = Z_c$ знаходимо з рівняння (2.34)

$$\begin{aligned} u(x', t) &= U_{2m} \sin(\omega t) \cos(\beta x') = \\ &= \frac{1}{2} U_{2m} \sin(\omega t + \beta x') + \frac{1}{2} U_{2m} \sin(\omega t - \beta x') = u_\varphi(x', t) + u_\psi(x', t); \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} i(x', t) &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \cos(\omega t) \sin(\beta x') = \\ &= \frac{1}{2} \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin(\omega t + \beta x') - \frac{1}{2} \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin(\omega t - \beta x') = i_\varphi(x', t) - i_\psi(x', t); \end{aligned}$$

З рівнянь (2.39) випливає, що $u(x,t)$ та $i(x,t)$ у будь-якій точці представляє суму однакових за амплітудою хвиль (падаючої та відбитої), що також підтверджується коефіцієнтом відбиття $\tilde{n} = \frac{Z_2 - Z_C}{Z_2 + Z_C} = 1$.

Падаюча та відбита хвилі напруги у точці неоднорідності ($x' = 0$) збігаються за фазою та збільшуються, створюючи видуги напруги – її максимальне значення. Для струму у кінці лінії $x' = 0$ буде вузол-мінімум у будь-який момент часу. На відстані $\lambda / 4$ від кінця лінії падаючі та відбиті хвилі напруги знаходяться у протифазі та створюють мінімум, а падаючі та відбиті хвилі струму у цій точці дають максимум. Чергування максимумів та мінімумів відбувається через $\lambda / 2$. При цьому точки максимумів напруги співпадають з точками мінімумів струму та навпаки – мінімуми напруги співпадають з максимумами струму. Вузли напруги та видуги струму розташовані у точках $\beta x' = k\pi + \pi / 2$, видуги напруги та вузли струму у точках $\beta x' = k\pi$ ($k \in N$). Графіки розподілу уздовж лінії миттєвих, діючих значень напруг та струмів, а також вхідного опору представлені на рис. 2.6.

Таким чином, у результаті накладання (інтерференції) однакових за амплітудою хвиль у лінії утворюються *стоячі хвилі*. Діюче значення напруги уздовж лінії змінюється за косинусоїдним законом $U(x) = U_2 |\cos(\beta x')|$, а діюче значення струму – за синусоїдним законом $I(x) = \frac{U_2}{Z_C} |\sin(\beta x')|$. Як

видно з виразу (2.40), зсув за фазою між напругою та струмом у будь-якій точці становить $\pm 90^\circ$. Так при зміні $\beta x'$ у межах $0 \div \pi / 2$ струм випереджає напругу у будь-який момент часу на $\pi / 2$, а при зміні $\pi / 2 \leq \beta x' \leq \pi$ напруга випереджає струм на $\pi / 2$. Кожного разу при проходженні вузла початкова фаза синусоїдних коливань змінюється стрибкоподібно на величину π .

У будь-який момент часу напруга та струм у вузлу дорівнюють нулю, тобто і потужність у цих точках лінії завжди дорівнює нулю, а енергія через ці точки не передається. В усіх інших точках, що не заняті вузлами, має місце

тільки реактивна потужність, оскільки напруга та струм зсунені на 90° , тобто виникає колювання енергії між електричним та магнітним полями.

Графіки зміни вхідного опору уздовж лінії будуються за виразом

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cos(\beta l)}{j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin(\beta l)} = \frac{Z_c}{j \operatorname{tg}(\beta l)} = -j Z_c \operatorname{ctg}(\beta l). \quad (2.40)$$

Як видно, $\underline{Z}_{\text{вх}}$ лінії суто реактивний, а характер його при незмінній частоті залежить від довжини лінії та її параметрів. Розімкнену лінію можна представити ємністю, якщо її довжина $0 \leq l \leq \lambda / 4$, послідовно побудованому контурі при $l = \frac{\lambda}{2}$, індуктивності при $\frac{\lambda}{4} \leq l \leq \frac{\lambda}{2}$, що паралельно налаштованому контуру при $l = \frac{\lambda}{2}$ і так далі. Зміна вхідного опору виникає у великому діапазоні від 0 до ∞ та показує їх застосування замість котушок індуктивності, конденсаторів та контурів. Необхідну довжину лінії, яка використовується як реактивне навантаження, можна знайти зі співвідношення

$$jx_p = -j Z_c \operatorname{ctg}(\beta l). \quad (2.41)$$

Зауважимо, що застосовані у радіотехнічних пристроях елементи індуктивності та ємності будуть вести себе як зосереджені параметри за умови, що їх лінійні розміри набагато менші довжини хвилі.

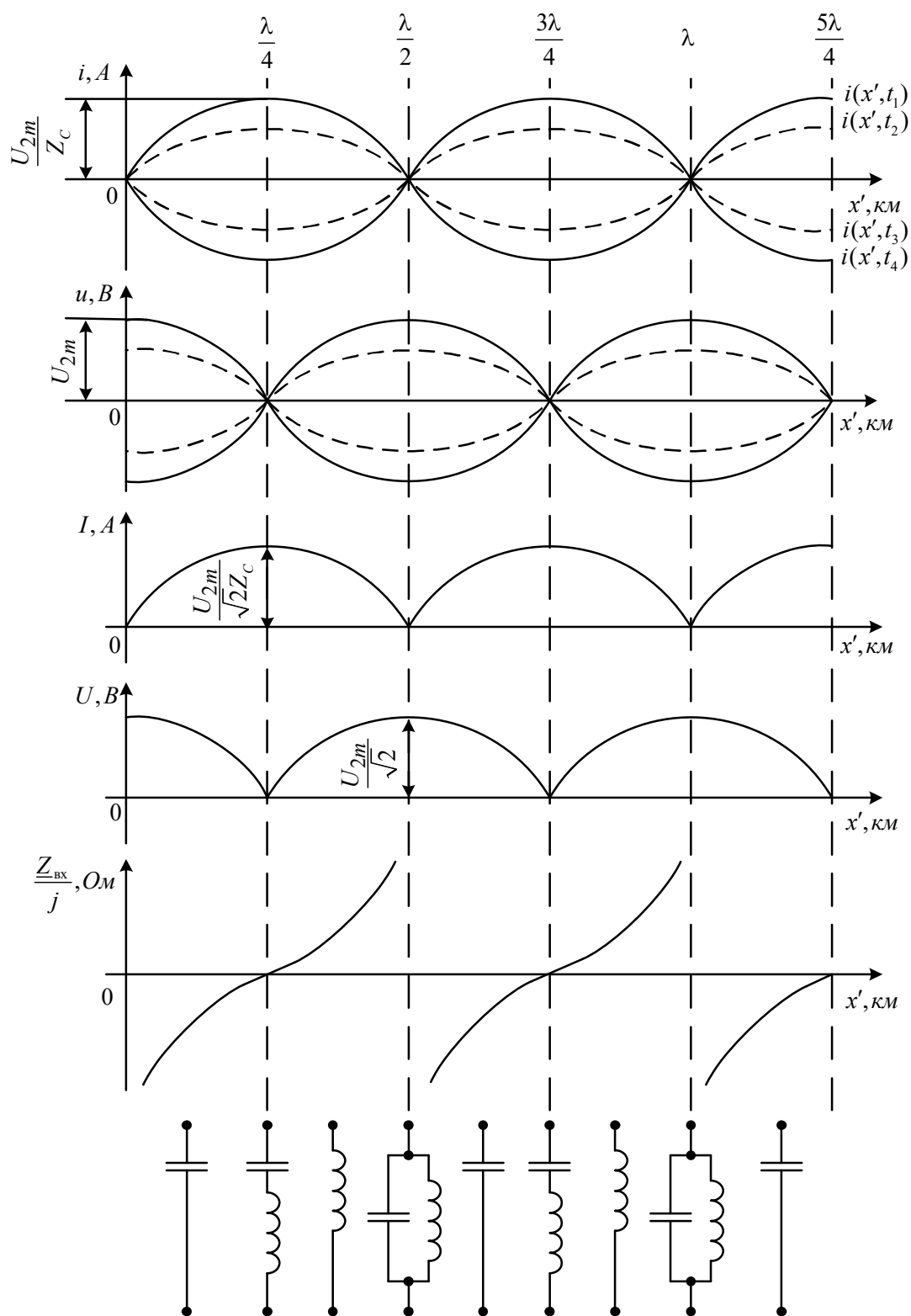


Рисунок 2.6 – Графіки розподілення уздовж лінії миттєвих, діючих значень напруг та струмів, а також вхідного опору при неробочому ході

Робота лінії без втрат у режимі короткого замикання на кінці лінії. Стоячі хвилі

При короткому замиканні лінії ($Z_2 = 0$) $U_2 = 0$, тому рівняння (2.36)

прийме вигляд
$$\begin{cases} \dot{U} = j\dot{I}_2 Z_C \sin(\beta x'); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x'). \end{cases} \quad (2.42)$$

Вважаючи $\dot{I}_2 = I_2$, запишемо миттєве значення

$$\begin{aligned} u(x', t) &= I_{2m} Z_C \cos(\omega t) \sin(\beta x') = \\ &= \frac{1}{2} I_{2m} Z_C \sin(\omega t + \beta x') - \frac{1}{2} I_{2m} Z_C \sin(\omega t - \beta x') = u_\phi(x', t) - u_\psi(x', t); \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} i(x', t) &= I_{2m} \sin(\omega t) \cos(\beta x') = \\ &= \frac{1}{2} I_{2m} \sin(\omega t + \beta x') + \frac{1}{2} I_{2m} \sin(\omega t - \beta x') = i_\phi(x', t) + i_\psi(x', t). \end{aligned}$$

Як видно, падаючі та відбиті хвилі мають однакову амплітуди та у результаті інтерференції створюють *стоячі хвилі*. У кінці лінії відбита хвиля напруги дорівнює падаючій, але протилежна за фазою, оскільки $\tilde{n} = -1$. Тому напруга у кінці лінії $U_2 = U_\phi + \tilde{n} \cdot U_\psi = U_\phi + (-1)U_\psi = 0$. Струм у кінці лінії є максимальним, оскільки $I_2 = I_\phi - \tilde{n} \cdot I_\psi = I_\phi - (-1)I_\psi = 2I_\phi$.

Вхідний опір дорівнює

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{j\dot{I}_2 Z_C \sin(\beta l)}{\dot{I}_2 \cos(\beta l)} = jZ_C \operatorname{tg}(\beta l) = jZ_C \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right). \quad (2.44)$$

При $(l=0) Z_{\text{вх}} = 0$, під час $(l = \frac{\lambda}{4}) Z_{\text{вх}} \rightarrow \infty$. Графіки напруг, струмів, вхідного опору будуються аналогічно режиму неробочого ходу та приведені на рис. 2.7. Там же наведено характер вхідного опору для ліній визначеної довжини.

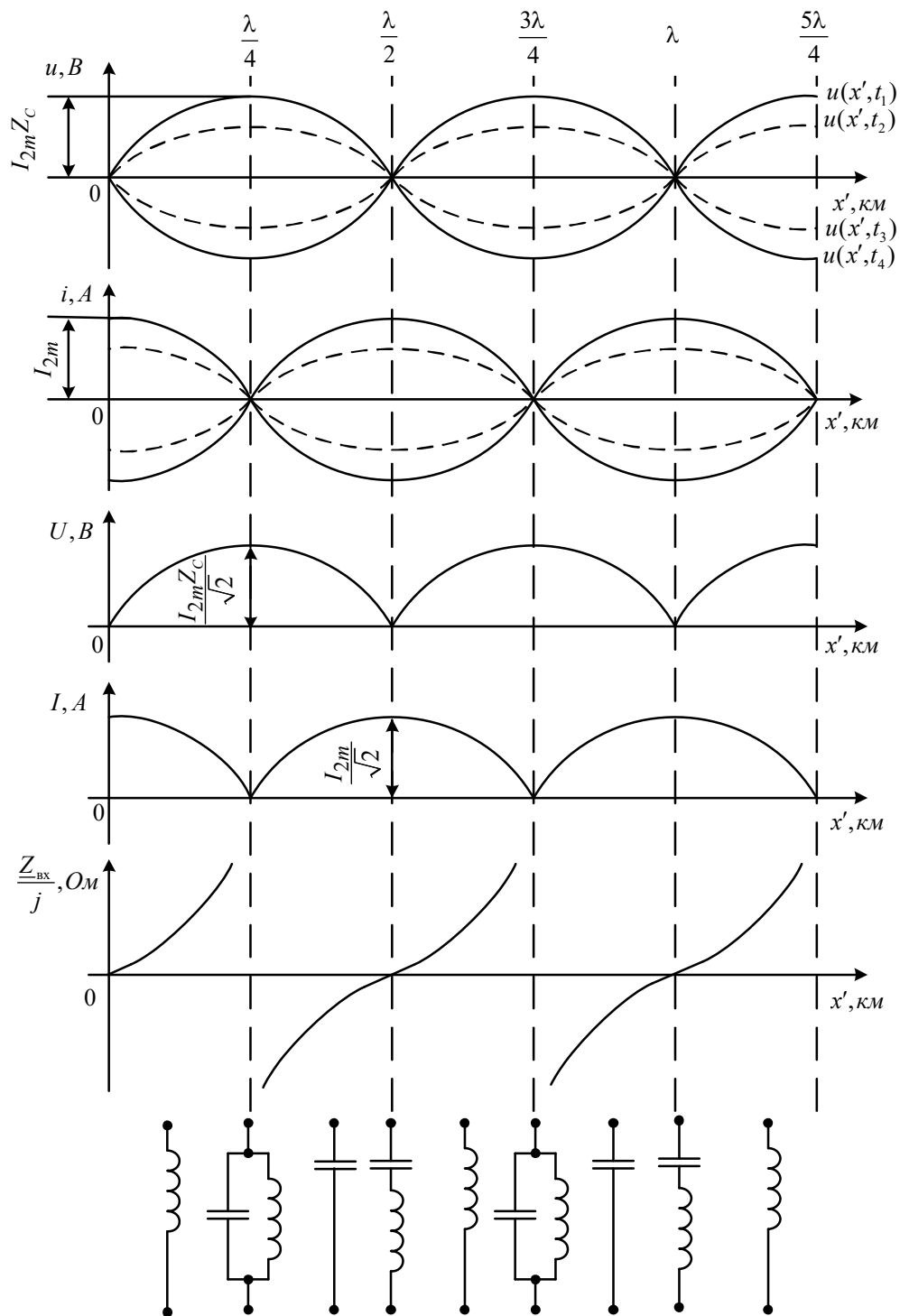


Рисунок 2.7 – Графіки розподілення уздовж лінії миттєвих, діючих значень напруг та струмів, а також входного опору під час короткого замикання

Тож лінію, яка замкнена на кінці, також можна використовувати у якості коливального контуру чи як реактивне навантаження:

$$jx_p = jZ_c \operatorname{ctg}(\beta l) \quad (2.45)$$

Лінію довжиною $l = \lambda / 4$ на високих частотах можна використовувати як ізолятор для підвіски дротів, оскільки при цьому $Z_{\text{вх}} = jZ_c \operatorname{tg}(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}) \rightarrow \infty$.

У такого «ізолятора» (рис. 2.8) малі втрати. А діелектрики на високих частотах мають великі втрати унаслідок гістерезису (нагріваються). Треба відмітити, що для цієї підвіски частота повинна бути незмінною, оскільки при іншій частоті довжина лінії не буде дорівнювати чверті довжини хвилі.

Якщо підвіску довжиною $l = \lambda / 4$ розімкнути, то у цьому місці виникне коротке замикання, так як $Z_{\text{вх}} = 0$.

Лінію, що замкнена на кінці, часто у радіотехніці застосовують у якості фільтрів.

Як і у розімкнутій лінії, на кінці при короткому замиканні з'являються *стоячі хвилі*, а відповідно, при цьому у деяких точках лінії з'являються вузли та видуги напруги та струму. *Енергія через вузли не проходить*. Коливання енергії відбувається у проміжках між вузлами.

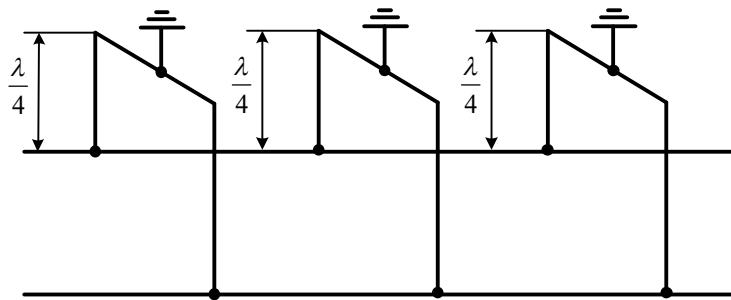


Рисунок 2.8— «Ізолятор» як частина довгої лінії

2. Програма роботи

2.1. Ознайомитись з теоретичними положеннями про усталені процеси однорідних довгих ліній, які представлені у пункті 1 «Основні теоретичні відомості».

2.2. Дослідити повітряну лінію з хвильовим опором Z_c , що з'єднує джерело синусоїдної напруги (діюче значення U_1 та f) з навантаженням, комплексний опір якого дорівнює $Z_n = Z_2$. Параметри лінії $l = 1.125\lambda$ (λ - довжина хвилі при заданій частоті f), фазова швидкість V_ϕ , коефіцієнт згасання α .

2.3. Визначити активну та реактивну потужності джерела (P_1, Q_1) та споживача (P_2, Q_2). Розрахувати коефіцієнт корисної дії η . Побудувати графіки розподілу діючих значень напруги $U(x)$ та $I(x)$, модуля вхідного опору $Z_{\text{вх}}(x)$ та аргументу вхідного опору $\varphi_{\text{вх}}(x)$ уздовж лінії.

2.4. Враховуючи, що в кінці лінії трапилось коротке замикання або розрив (відповідно номеру варіанту табл. 2.1), напруга на початку лінії залишалася незмінною, побудувати графіки розподілу діючих значень напруги $U(x)$ та $I(x)$, модуля вхідного опору $Z_{\text{вх}}(x)$ та аргументу вхідного опору $\varphi_{\text{вх}}(x)$ уздовж лінії.

Таблиця 2.1 – Дані для розрахунку лінії з розподіленими параметрами

№1	U_1, B	$f, кГц$	№2	$V_\phi, \frac{км}{с}$	$\alpha, \frac{Нп}{км}$	№3	$Z_c, Ом$	$\frac{Z_2}{Z_c}$	Режим
0	600	50	0	$2.5 \cdot 10^5$	0.11	0	800	$0.25 + j0.1$	Нх
1	550	60	1	$2.55 \cdot 10^5$	0.12	1	750	$0.25 - j0.1$	Кз
2	500	70	2	$2.6 \cdot 10^5$	0.13	2	700	$0.4 + j0.25$	Нх
3	450	80	3	$2.65 \cdot 10^5$	0.14	3	650	$0.4 - j0.25$	Кз
4	400	90	4	$2.7 \cdot 10^5$	0.15	4	600	$0.5 + j0.2$	Нх
5	350	100	5	$2.75 \cdot 10^5$	0.16	5	550	$0.5 - j0.2$	Кз
6	300	110	6	$2.8 \cdot 10^5$	0.17	6	500	$0.6 + j0.3$	Нх
7	250	120	7	$2.85 \cdot 10^5$	0.18	7	450	$0.6 - j0.3$	Кз
8	200	130	8	$2.9 \cdot 10^5$	0.19	8	400	$0.75 + j0.4$	Нх
9	150	140	9	$2.95 \cdot 10^5$	0.2	9	350	$0.75 - j0.4$	Кз

Приміта. Дані для розрахунку вибрати згідно з шифром, що складається з трьох цифр №1, №2, №3. Шифр задає викладач. Нх – режим неробочого ходу (розрив у кінці лінії). Кз – режим короткого замикання (замикання у кінці лінії).

2.5. Враховуючи, що знайдена у п. 2.2 активна потужність навантаження P_2 повинна бути передана узгодженою лінією, визначити комплексне значення потрібної напруги U_1 на вході, комплексне значення струму I_1 генератора та коефіцієнт корисної дії η .

2.6. Виконати пункти пп. 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, вважаючи, що коефіцієнт згасання дорівнює нулю.

2.7. Порівняти результати одержані, для лінії без втрат ($\alpha = 0$) з результатами для лінії з втратами ($\alpha \neq 0$).

2.8. Графіки розподілу діючих значень напруги $U(x)$ та $I(x)$, модуля вхідного опору $Z_{\text{вх}}(x)$ та аргументу вхідного опору $\varphi_{\text{вх}}(x)$ уздовж лінії виконати у математичному середовищі Mathcad або MatLab.

2.9. Оформити звіт по лабораторній роботі.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ПО ВИКОНАННЮ РОБОТИ

1. Підготовка до виконання роботи

1. Вивчити основні теоретичні відомості відносно усталених режимів у колах з розподіленими параметрами.

2. Написати рівняння, за допомогою яких визначаються довжина хвилі та лінії, вхідний опір лінії, коефіцієнт фази, опір навантаження, струм на вході лінії, потужність на вході лінії, струм та напруга у кінці лінії, потужність у кінці лінії, коефіцієнт корисної дії.

3. Написати рівняння, за допомогою яких визначаються струм та напруга на початку лінії.

4. Ознайомитись з процесами у довгій лінії без втрат в усталених режимах з активним та реактивним навантаженням, схеми яких зображені на рис. 2.9 - рис. 2.11.

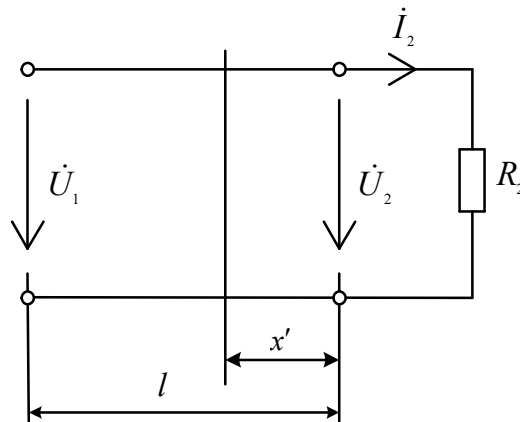


Рисунок 2.9 – Електрична схема довгої лінії без втрат при активному навантаженні

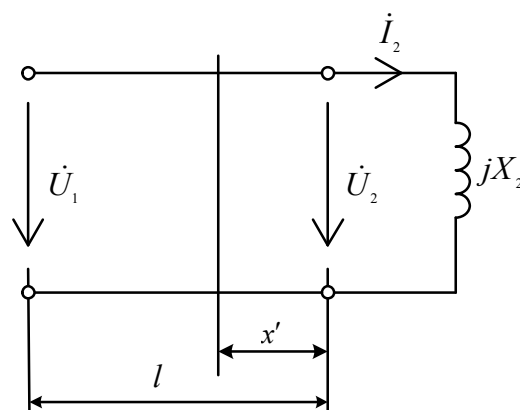


Рисунок 2.10 – Електрична схема довгої лінії з реактивним навантаженням (котушка індуктивності)

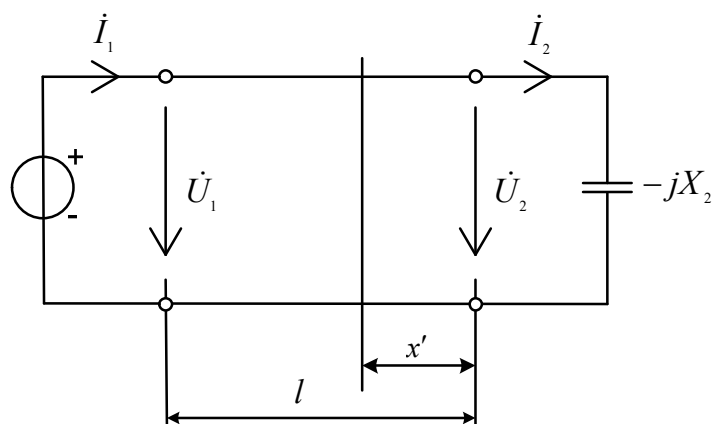


Рисунок 2.11 – Електрична схема довгої лінії з реактивним навантаженням
(конденсатор)

5. Вивчити програму роботи. Ознайомитися з контрольними питаннями лабораторної роботи.

2. Порядок виконання роботи

1. Відповідно до шифру, який задає викладач, та таблиці 2.1 для однорідної лінії з втратами необхідно визначити довжину хвилі

$$\lambda = \frac{V_{\phi}}{f} = \frac{2\pi}{\beta}, \text{ км.}$$

2. Обрахувати коефіцієнт фази $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \frac{\text{рад}}{\text{км}}$.

3. Задати довжину лінії $l = 1.125\lambda, \text{ км}$.

4. Визначити опір навантаження $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_n = \underline{Z}_c(a + jb), \text{ Ом}$.

5. Розрахувати вхідний опір однорідної лінії

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_n + j\underline{Z}_c \text{th}(\underline{\gamma}l)}{\underline{Z}_c + j\underline{Z}_n \text{th}(\underline{\gamma}l)}, \text{ Ом.}$$

6. Знайти струм на вході довгої лінії $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}}, \text{ А}$.

7. Визначити повну потужність на вході довгої лінії з втратами

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^* = P_1 + jQ_1, \text{ ВА.}$$

8. Струм та напругу у кінці лінії (на навантаженні) розрахувати за виразом

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_1 \text{ch}(\underline{\gamma}l) - \dot{I}_1 \underline{Z}_c \text{sh}(\underline{\gamma}l); \\ \dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \text{sh}(\underline{\gamma}l) + \dot{I}_1 \text{ch}(\underline{\gamma}l). \end{cases} \quad (2.57)$$

Зробити перевірку $\underline{Z}_n = \dot{U}_2 / \dot{I}_2, \text{ Ом}$.

9. Визначити повну потужність у кінці лінії $\tilde{S}_2 = \dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2^* = P_2 + jQ_2, BA$.

10. Обрахувати коефіцієнт корисної дії $\eta = \frac{P_2}{P_1}$.

11. Розбити довгу лінію з втратами на ділянки $x = \Delta l = \frac{\lambda}{8}$ (9 ділянок) та

визначити струм $\dot{I}(x)$, напругу $\dot{U}(x)$ та вхідний опір $\underline{Z}_{\text{вх}}(x)$ на кожній ділянці

за формулами
$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \text{ch}(\gamma x) - \dot{I}_1 \underline{Z}_C \text{sh}(\gamma x); \quad \underline{Z}_{\text{вх}}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = Z_{\text{вх}} \angle \varphi_{\text{вх}}; \\ \dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\gamma x) + \dot{I}_1 \text{ch}(\gamma x). \end{cases}$$

12. Побудувати за даними пункту 11 графіки розподілу напруги $\dot{U}(x)$, струму $\dot{I}(x)$, повного вхідного опору (модуля) $Z_{\text{вх}}(x)$ та його кута $\varphi_{\text{вх}}(x)$ уздовж лінії.

13. Для варіанту з розривом у кінці лінії побудувати графіки розподілу діючих значень напруги $U_{\text{нх}}(x)$ та $I_{\text{нх}}(x)$, модуля вхідного опору $Z_{\text{вхнх}}(x)$ та аргументу вхідного опору $\varphi_{\text{вхнх}}(x)$ уздовж лінії, використовуючи наступні формули

$$\dot{U}_{2\text{нх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1 \text{ch}(\gamma l)}, \dot{U}_{\text{нх}}(x) = \dot{U}_{2\text{нх}} \text{ch}(\gamma x), \dot{I}_{\text{нх}}(x) = \frac{\dot{U}_{2\text{нх}}}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\gamma x), \underline{Z}_{\text{вхнх}}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{нх}}(x)}{\dot{I}_{\text{нх}}(x)}.$$

14. Для варіанту з коротким замиканням у кінці лінії побудувати графіки розподілу діючих значень напруги $U_{\text{кз}}(x)$ та $I_{\text{кз}}(x)$, модуля вхідного опору $Z_{\text{вхкз}}(x)$ та аргументу вхідного опору $\varphi_{\text{вхкз}}(x)$ уздовж лінії, використовуючи наступні вирази

$$\dot{I}_{2\text{кз}} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_C \text{sh}(\gamma l)}, \dot{U}_{\text{кз}}(x) = \dot{I}_{2\text{кз}} \underline{Z}_C \text{sh}(\gamma x), \dot{I}_{\text{кз}}(x) = \dot{I}_{2\text{кз}} \text{ch}(\gamma x), \underline{Z}_{\text{вхкз}}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{кз}}(x)}{\dot{I}_{\text{кз}}(x)}.$$

15. Відповідно до пункту 2.5 активна потужність навантаження P_2 повинна бути передана узгодженою лінією.

Тому потужність споживача необхідно задати як $P_{2y} = \text{Re}(S_2), Bm$.

Обрахувати струм навантаження в узгодженому режимі $I_{2y} = \sqrt{\frac{P_{2y}}{Z_C}}, A$.

Визначити напругу на навантаженні $U_{2y} = I_{2y} Z_C, B$.

Знайти розподіл стуму та напруги уздовж лінії
$$\begin{cases} \dot{U}_y(x) = \dot{U}_{2y} e^{\gamma x}; \\ \dot{I}_y(x) = \dot{I}_{2y} e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Розрахувати напругу та струм на початку узгодженої лінії

$$\dot{U}_{1y} = \dot{U}_{2y} e^{\gamma l}, B; \dot{I}_{1y} = \dot{I}_{2y} e^{\gamma l}, A.$$

Обрахувати потужність на початку лінії $P_{1y} = \dot{U}_{1y} \dot{I}_{1y}, Bm$.

Визначити коефіцієнт корисної дії $\eta_y = \frac{P_{1y}}{P_{2y}}$.

Побудувати графіки розподілу напруги $\dot{U}_y(x)$, струму $\dot{I}_y(x)$, повного вхідного опору (модуля) $Z_{вхy}(x)$ та його кута $\varphi_{вхy}(x)$ уздовж лінії.

16. Виконати пункти 5 -15 вважаючи що досліджувана лінія є ідеальною, тобто коефіцієнт згасання дорівнює нулю $\alpha = 0$.

3. Обробка результатів математичного моделювання

1. Для ідеальної лінії та лінії з втратними в режимах короткого замикання, неробочого ходу, узгодженого та неузгодженого режимів перевірити наявність прямої та зворотної хвилі напруги, що поширюється уздовж лінії за рівняннями (2.12)

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \underline{Z}_C \dot{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \underline{Z}_C \dot{I}_1) e^{\gamma x} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi; \\ \dot{I} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_C \dot{I}_1}{\underline{Z}_C}) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_C \dot{I}_1}{\underline{Z}_C}) e^{\gamma x} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi. \end{cases}$$

2. Порівняти графіки розподілу діючих значень напруги $U(x)$ та $I(x)$, модуля вхідного опору $Z_{\text{вх}}(x)$ та аргументу вхідного опору $\varphi_{\text{вх}}(x)$ уздовж лінії, що були одержані за допомогою математичного моделювання для ідеальної лінії ($\alpha = 0$) з графіками для лінії з втратами ($\alpha \neq 0$).

3. Зробити висновки за результатами дослідження лінії з розподіленими параметрами.

ЗМІСТ ЗВІТУ

Протокол з лабораторної роботи має містити матеріали, що оформлюються відповідно до правил та вимог ЄСКД та ДСТУ:

- титульний аркуш, прилад якого наведено у додатку А;
- мету та послідовність виконання лабораторної роботи;
- електричні схеми з параметрами елементів, що досліджуються;
- таблиці величин, що вимірюються та розраховуються;
- умови завдання для варіанту бригади;
- формули обчислень, повинні бути представлені у заданому порядку: рівняння у літерних позначеннях, рівняння у числах, відповідь та одиниці виміру;
- графіки, що побудовані за результатами математичного моделювання та розрахунків;
- програми та результати моделювання у математичних середовищах MatLab або Mathcad;
- висновки за даними лабораторної роботи (проаналізувати усталений режим довгої однорідної лінії).

Питання для самостійної роботи

Яка лінія зветься однорідною?

Якими параметрами характеризується довга лінія?

Як відрізнити падаючі та відбиті хвилі, що записані у показниковій формі або через миттєве значення, коли відлік довжини починається від початку та від кінця?

Що характеризує коефіцієнт поширення та фазова швидкість?

Що характеризує коефіцієнт відбиття, хвильовий та вхідний опори?

Чим характеризується лінія без втрат?

Порівняйте рівняння довгої лінії з втратами та «ідеальної» лінії.

У яких випадках на лінії виникають стоячі хвилі струму та напруги і що є характерним для стоячих хвиль?

Чи може напруга на початку лінії з втратами у режимі неробочого ходу бути меншою за напругу у кінці лінії?

Чому дорівнює вхідний опір лінії довжиною $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{2}$ у режимі неробочого ходу та короткого замикання?

Як впливає зміна величини активного навантаження у кінці лінії з втратами на поширення струму та напруги уздовж лінії, а також на величину вхідного опору?

Як впливає зміна величини реактивного навантаження у кінці лінії без втрат на поширення струму та напруги, а також на величину вхідного опору?

Чим характеризується лінія, що замкнена на характеристичний опір?

Як розподіляються діючі значення напруг та струмів у довгій лінії без втрат при короткому замиканні та неробочому ході?

Як змінюється вхідний опір лінії, яка розімкнена (чи замкнена) у кінці під час: а) зміни частоти джерела живлення;

б) зміни довжини лінії?

Приклад моделювання усталених режимів однорідної лінії з розподіленням параметрами у пакеті прикладної програми Mathcad

Повітряна лінія з хвильовим опором Z_c з'єднує джерело синусоїдної

напруги з навантаженням, комплексний опір якого дорівнює Z_2 . Параметри лінії при $l = 1.125\lambda$ є наступними:

$$\begin{array}{llll} U_1 := 1000 & \text{В} & \alpha_1 := 0.5 & \frac{\text{Нп}}{\text{км}} \\ f_1 := 100 \cdot 10^3 & \text{Гц} & Z_c := 850 & \text{Ом} \\ V_1 := 2.8 \cdot 10^5 & \frac{\text{км}}{\text{с}} & n_1 := 0.25 + j \cdot 0.1 & j := \sqrt{-1} \end{array}$$

1. Визначимо активну та реактивну потужності, які генеруються джерелом та споживаються навантаженням. Обчислимо коефіцієнт корисної дії лінії.

$$\text{Довжина хвилі} \quad \lambda_1 := \frac{V_1}{f_1} = \frac{2.8 \cdot 10^5}{100 \cdot 10^3} = 2.8 \quad \text{км}$$

$$\text{Коефіцієнт фази} \quad \beta_1 := 2 \frac{\pi}{\lambda_1} = 2 \cdot \frac{\pi}{2.8} = 2.244 \quad \frac{\text{рад}}{\text{км}}$$

$$\text{Довжина лінії} \quad L_1 := 1.125 \cdot \lambda_1 = 3.15 \quad \text{км}$$

$$\text{Опір навантаження} \quad \text{POL}(Z_H) := \left(|Z_H| \quad \arg(Z_H) \cdot \frac{180}{\pi} \right)$$

$$Z_H := n_1 \cdot Z_c = 212.5 + 85i \quad \text{Ом} \quad \text{POL}(Z_H) = (228.87 \quad 21.801) \quad \text{Ом}$$

$$\text{Коефіцієнт поширення} \quad \gamma_1 := \alpha_1 + j \cdot \beta_1 = 0.5 + 2.244i$$

$$\text{Вхідний опір лінії} \quad Z_{\text{вх}} := Z_c \cdot \frac{Z_H + Z_c \cdot \tanh(\gamma_1 \cdot L_1)}{Z_c + Z_H \cdot \tanh(\gamma_1 \cdot L_1)} = 858.214 + 43.412i \quad \text{Ом}$$

$$\text{POL}(Z_{\text{вх}}) = (859.312 \quad 2.896) \quad \text{Ом}$$

$$\text{Струм на вході лінії} \quad I_1 := \frac{U_1}{Z_{\text{вх}}} = 1.162 - 0.059i \quad \text{А}$$

$$\text{POL}(I_1) = (1.164 \quad -2.896) \quad \text{А}$$

$$\text{Потужність на вході лінії} \quad S_1 := U_1 \cdot \bar{I}_1 = 1.162 \times 10^3 + 58.79 \text{ ВА}$$

$$\text{POL}(S_1) = (1.164 \times 10^3 \quad 2.896) \text{ ВА}$$

Струм та напруга в кінці лінії (на навантаженні)

$$U_2 := U_1 \cdot \cosh(\gamma_1 \cdot L_1) - I_1 \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot L_1) = 77.145 - 43.139i \text{ В} \quad \text{POL}(U_2) = (88.388 \quad -29.213) \text{ В}$$

$$I_2 := -\left(\frac{U_1}{Z_c}\right) \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot L_1) + I_1 \cdot \cosh(\gamma_1 \cdot L_1) = 0.243 - 0.3i \text{ А} \quad \text{POL}(I_2) = (0.386 \quad -51.015) \text{ А}$$

Перевірка $Z_{H1} := \frac{U_2}{I_2} = 212.5 + 85i \text{ Ом} \quad \text{POL}(Z_{H1}) = (228.87 \quad 21.801) \text{ Ом}$

$$\text{POL}(Z_H) = (228.87 \quad 21.801) \text{ Ом}$$

Потужність в кінці лінії

$$S_2 := U_2 \cdot \overline{I_2} = 31.693 + 12.677i \text{ ВА}$$

$$\text{POL}(S_2) = (34.135 \quad 21.801) \text{ ВА}$$

Коефіцієнт корисної дії $\eta := \frac{\text{Re}(S_2)}{\text{Re}(S_1)} = 0.027$

Розбиваємо лінію на ділянки та визначимо струм, напругу та вхідний опір на кожній ділянці за формулами

$$x_1 := \frac{\lambda_1}{8} = 0.35$$

$$x := 0.0001, \frac{\lambda_1}{10 \cdot 8} .. 1.125 \cdot \lambda_1$$

$$U(x) := U_1 \cdot \cosh(\gamma_1 \cdot x) - I_1 \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot x)$$

$$I(x) := -\left(\frac{U_1}{Z_c}\right) \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot x) + I_1 \cdot \cosh(\gamma_1 \cdot x)$$

$$Z_{\text{Exl}}(x) := \frac{U(x)}{I(x)} \quad \varphi_{\text{Exl}}(x) := \arg(Z_{\text{Exl}}(x)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

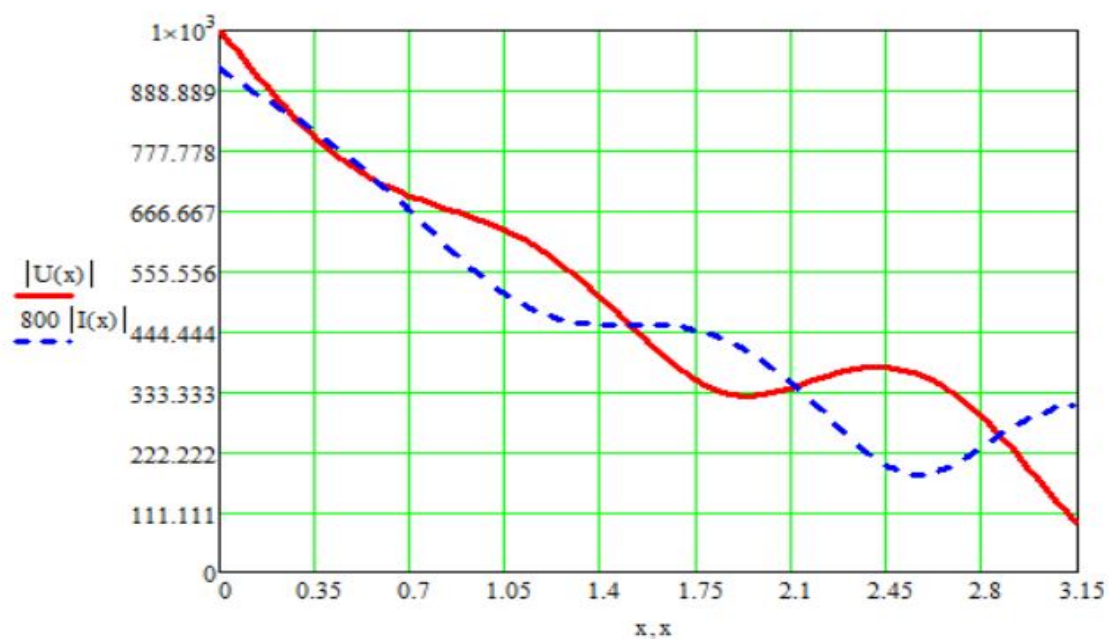


Рисунок 2.12 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії з втратами

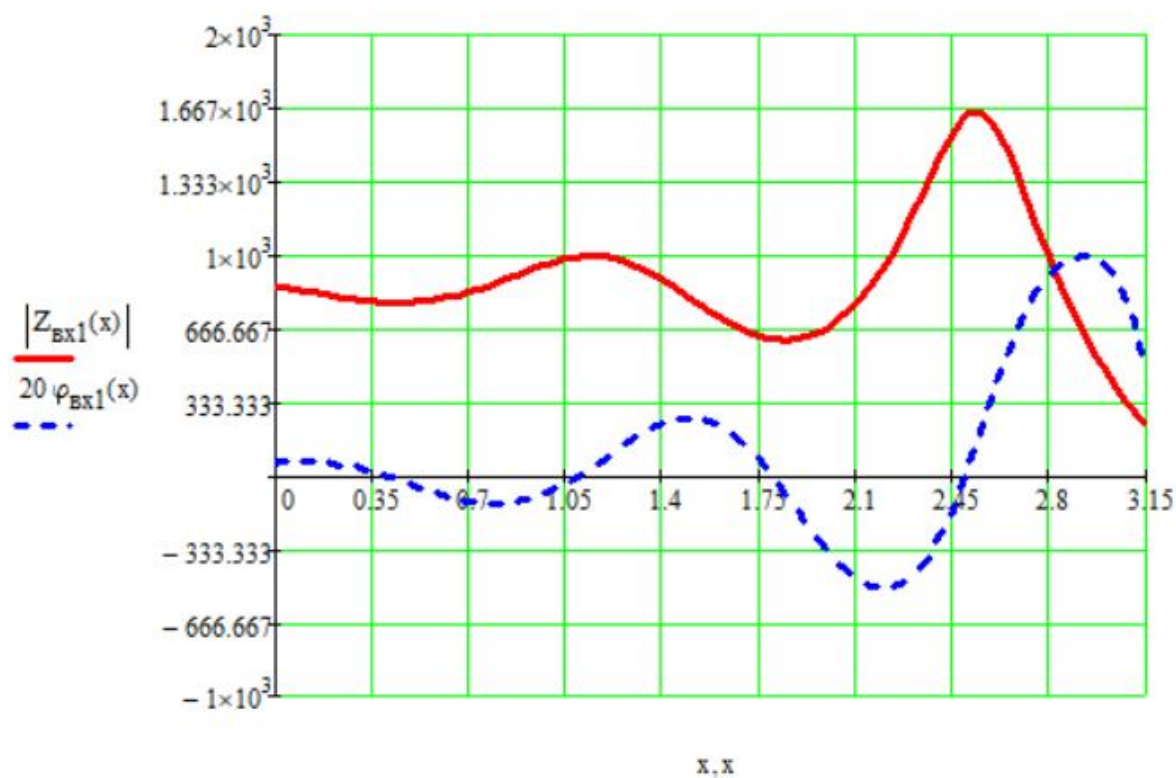


Рисунок 2.13 - Графіки розподілу модуля Z_{Bx1} та його аргументу уздовж лінії з втратами

2. Розглянемо випадок коли у кінці лінії стався розрив, а напруга на початку лінії залишилась незмінною

$$U_{2x} := \frac{U_1}{\cosh(\gamma_1 \cdot L_1)} = 304.734 - 279.7i \quad \text{В} \quad \text{POL}(U_{2x}) = (413.636 \quad -42.547) \quad \text{В}$$

$$I_{1nx} := \left(\frac{U_{2x}}{Z_c} \right) \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot 1.125 \cdot \lambda_1) = 1.172 + 0.101i \quad \text{А} \quad \text{POL}(I_{1nx}) = (1.176 \quad 4.907) \quad \text{А}$$

$$U_{1x}(x) := U_{2x} \cdot \cosh(\gamma_1 \cdot x)$$

$$I_{1x}(x) := \left(\frac{U_{2x}}{Z_c} \right) \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot x)$$

$$Z_{\text{Bx}1x}(x) := \frac{U_{1x}(x)}{I_{1x}(x)} \quad \varphi_{\text{Bx}1x}(x) := \arg(Z_{\text{Bx}1x}(x)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

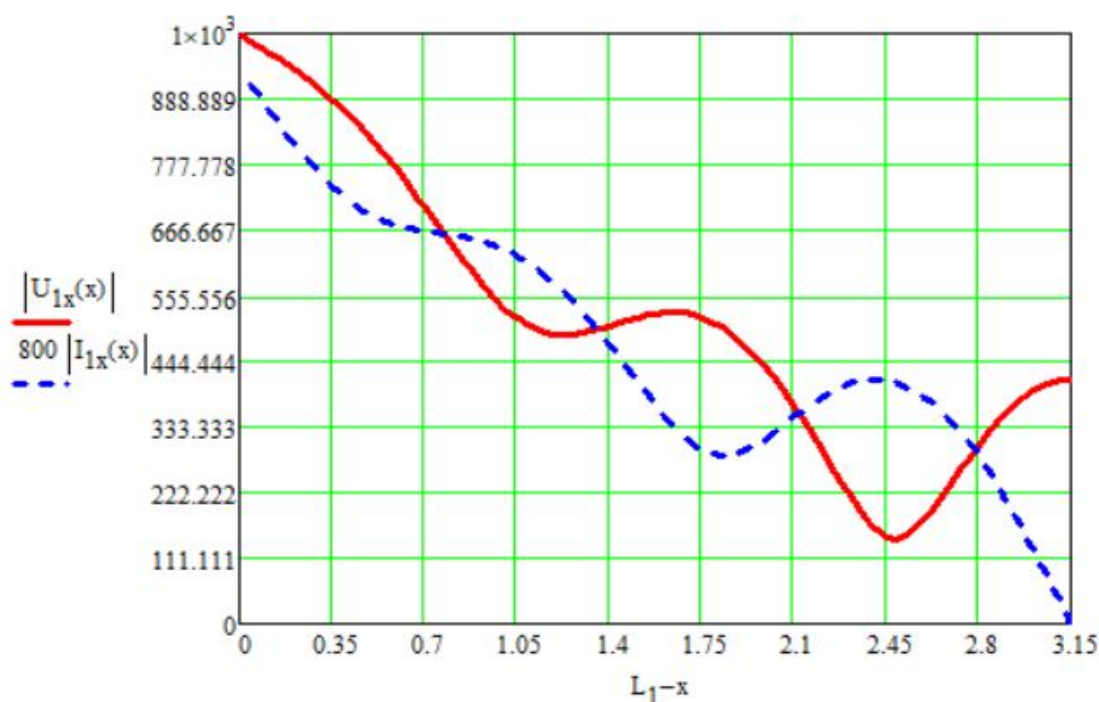


Рисунок 2.14 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії з втратами (неробочій хід)

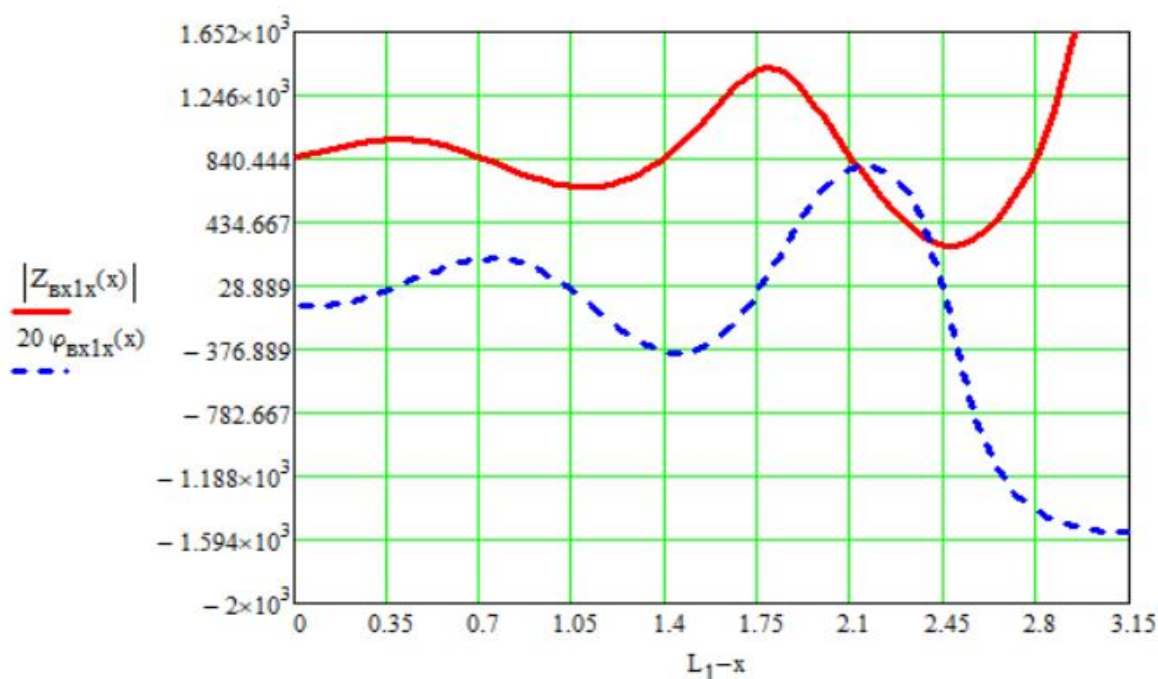


Рисунок 2.15 - Графіки розподілу модуля Z_{BX} та його аргументу уздовж лінії з втратами (неробочий хід)

3. Враховуючи, що знайдена в п.1 потужність навантаження P_2 повинна бути передана узгодженою лінією, визначимо комплекс потрібної напруги U_1 на вході, комплекс струму I_1 генератора та коефіцієнт потужності

$$P_2 := \operatorname{Re}(S_2) = 31.693 \quad \text{Вт} \quad Z_c = 850 \quad \text{Ом}$$

$$\text{Струм навантаження} \quad I_{2y} := \sqrt{\frac{P_2}{Z_c}} = 0.193 \quad \text{А}$$

$$\text{Напруга на навантаженні} \quad U_{2y} := I_{2y} \cdot Z_c = 164.132 \quad \text{В}$$

Напруга та струм на початку лінії

$$U_{1y} := U_{2y} \cdot e^{\gamma_1 \cdot L_1} = 560.64 + 560.659i \quad \text{В} \quad \operatorname{POL}(U_{1y}) = (792.878 \quad 45.001) \quad \text{В}$$

$$I_{1y} := I_{2y} \cdot e^{\gamma_1 \cdot L_1} = 0.66 + 0.66i \quad \text{А} \quad \operatorname{POL}(I_{1y}) = (0.933 \quad 45.001) \quad \text{А}$$

Розподіл струму та напруги
уздовж лінії з втратами

$$U_y(x) := U_{2y} \cdot e^{\gamma_1 \cdot x}$$

$$I_y(x) := I_{2y} \cdot e^{\gamma_1 \cdot x}$$

+

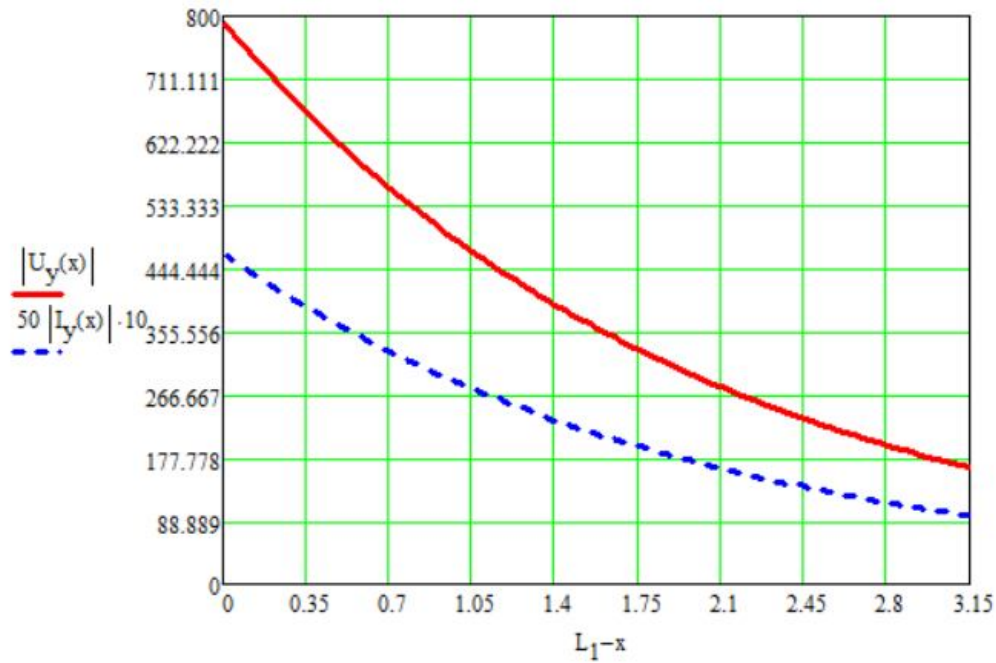


Рисунок 2.16 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії з втратами (узгоджене навантаження)

Потужність на початку лінії $P_{1y} := |U_{1y}| \cdot |I_{1y}| = 739.595 \quad \text{Вт}$

Коефіцієнт корисної дії $\eta_y := \frac{P_2}{P_{1y}} = 0.043$

$$Z_{\text{вх}1y}(x) := \frac{U_y(x)}{I_y(x)} \quad \varphi_{\text{вх}1y}(x) := \arg(Z_{\text{вх}1y}(x)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

+

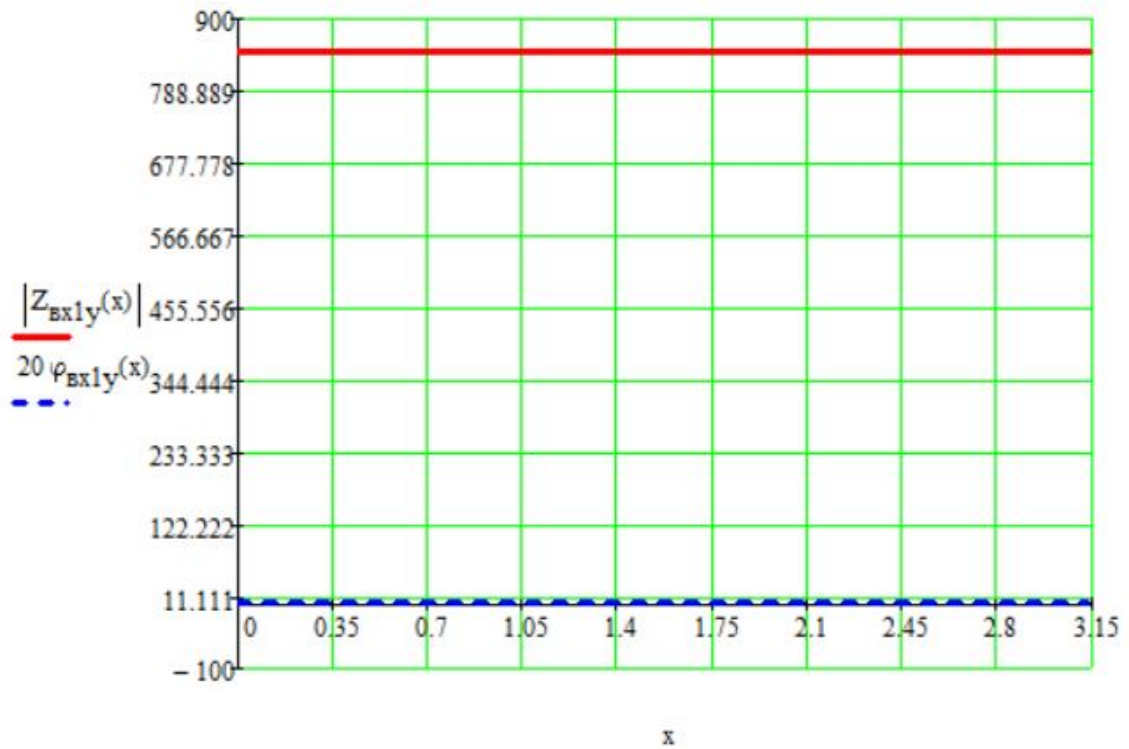


Рисунок 2.17 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії з втратами в узгодженому режимі

4. Виконаємо пункти пп. 1, 2, 3 вважаючи, що коефіцієнт послаблення дорівнює нулю.

4.1 Визначимо активну та реактивну потужності, які генеруються джерелом та споживаються навантаженням. Обчислимо коефіцієнт корисної дії лінії

$$\alpha_{10} := 0$$

$$\gamma_1 = 0.5 + 2.244i$$

$$\gamma_{10} := \alpha_{10} + j \cdot \beta_1 = 2.244i$$

Вхідний опір лінії

$$\text{POL}(Z_{\text{вх}}) = (859.312 \quad 2.896) \quad \text{Ом}$$

$$Z_{\text{вх}0} := Z_c \cdot \frac{Z_H + Z_c \cdot \tanh(\gamma_{10} \cdot L_1)}{Z_c + Z_H \cdot \tanh(\gamma_{10} \cdot L_1)} = 850 \cdot \frac{212.5 + 85i + 850 \cdot \tanh(2.244i \cdot 3.15)}{850 + (212.5 + 85i) \cdot \tanh(2.244i \cdot 3.15)} = 487.1 + 903.6i$$

$$\text{POL}(Z_{\text{вх}0}) = (1.027 \times 10^3 \quad 61.672) \quad \text{Ом}$$

Струм на вході лінії

$$\text{POL}(I_1) = (1.164 \quad -2.896) \quad \text{А}$$

$$I_{10} := \frac{U_1}{Z_{\text{вх}0}} = 0.462 - 0.858i \quad \text{А}$$

$$\text{POL}(I_{10}) = (0.974 \quad -61.672) \quad \text{А}$$

Потужність на вході лінії

$$\text{POL}(S_1) = (1.164 \times 10^3 \quad 2.896) \quad \text{ВА}$$

$$S_{10} := U_1 \cdot \overline{I_{10}} = 462.25 + 857.501i$$

$$\text{POL}(S_{10}) = (974.158 \quad 61.672) \quad \text{ВА}$$

Струм та напруга в кінці лінії (на навантаженні)

$$U_{20} := U_1 \cdot \cosh(\gamma_{10} \cdot L_1) - I_{10} \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_{10} \cdot L_1) = 191.693 - 277.836i \quad \text{В}$$

$$\text{POL}(U_2) = (88.388 \quad -29.213) \quad \text{В}$$

$$\text{POL}(U_{20}) = (337.548 \quad -55.396) \quad \text{В}$$

$$I_{20} := -\left(\frac{U_1}{Z_c}\right) \cdot \sinh(\gamma_{10} \cdot L_1) + I_{10} \cdot \cosh(\gamma_{10} \cdot L_1) = 0.327 - 1.438i \quad \text{А}$$

$$\text{POL}(I_2) = (0.386 \quad -51.015) \quad \text{А}$$

$$\text{POL}(I_{20}) = (1.475 \quad -77.196) \quad \text{А}$$

Перевірка

$$\text{POL}(Z_H) = (228.87 \quad 21.801) \quad \text{Ом}$$

$$Z_{\text{н}10} := \frac{U_{20}}{I_{20}} = 212.493 + 84.992i \quad \text{Ом}$$

$$\text{POL}(Z_{\text{н}1}) = (228.87 \quad 21.801) \quad \text{Ом}$$

$$\text{POL}(Z_{\text{н}10}) = (228.86 \quad 21.8) \quad \text{Ом}$$

Потужність в кінці лінії

$$S_{20} := U_{20} \cdot \overline{I_{20}} = 462.25 + 184.889i \quad \text{ВА}$$

$$\text{POL}(S_2) = (34.135 \quad 21.801) \quad \text{ВА}$$

$$\text{POL}(S_{20}) = (497.854 \quad 21.8) \quad \text{ВА}$$

Коефіцієнт корисної дії

$$\eta_0 := \frac{\text{Re}(S_{20})}{\text{Re}(S_{10})} = 1$$

$$\eta = 0.027$$

Розбиваємо лінію на ділянки та визначимо струм, напругу та вхідний опір на кожній ділянці за формулами

$$U_0(x) := U_1 \cdot \cosh(\gamma_{10} \cdot x) - I_{10} \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_{10} \cdot x) \quad \underline{I_0(x)} := -\left(\frac{U_1}{Z_c}\right) \cdot \sinh(\gamma_{10} \cdot x) + I_{10} \cdot \cosh(\gamma_{10} \cdot x)$$

$$Z_{\text{вх}10}(x) := \frac{U_0(x)}{I_0(x)} \quad \varphi_{\text{вх}10}(x) := \arg(Z_{\text{вх}10}(x)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

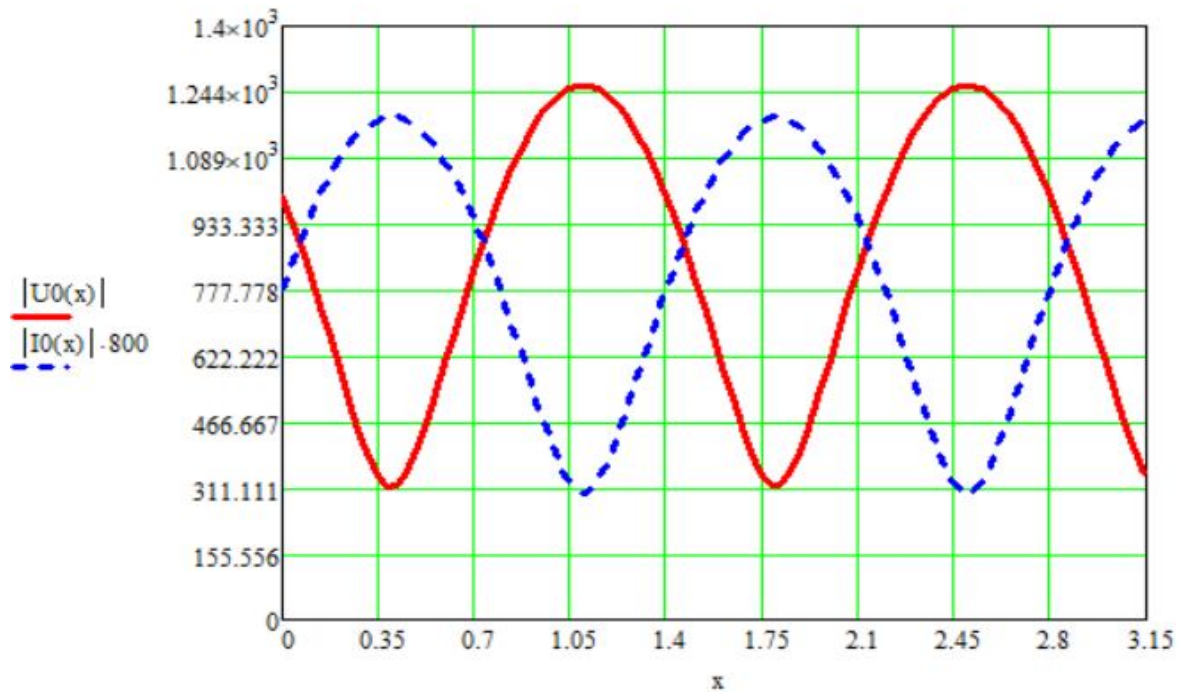


Рисунок 2.18 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії без втрат

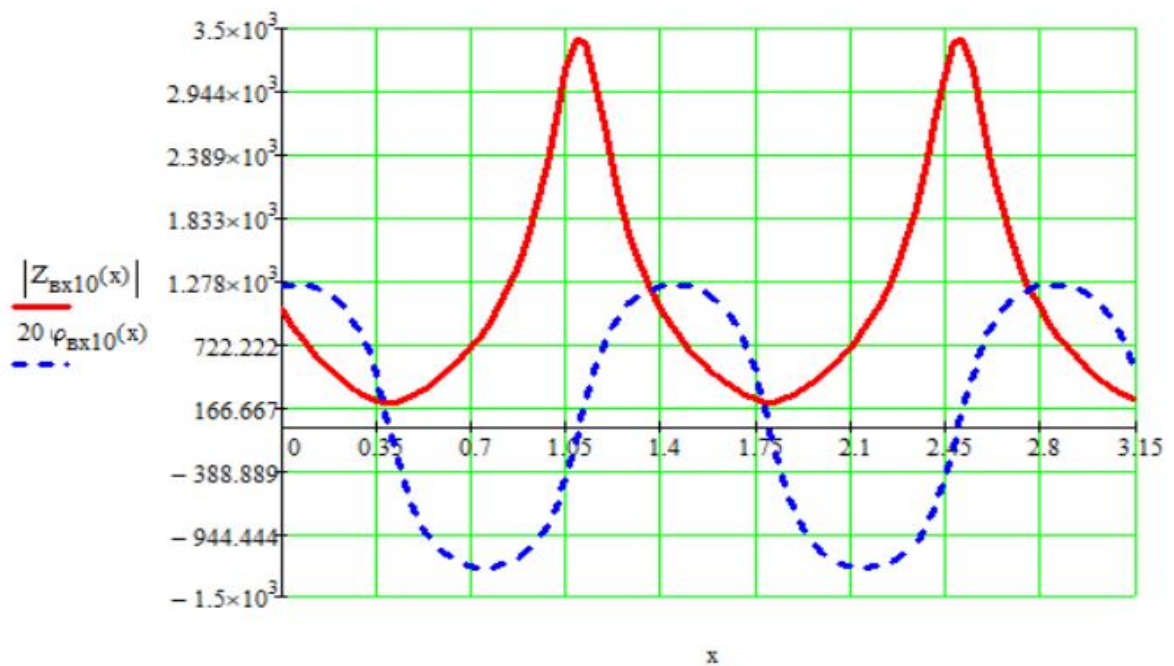


Рисунок 2.19 - Графіки розподілу модуля $Z_{\text{вх}}$ та його аргументу уздовж лінії без втрат

4.2. Розглянемо випадок коли у кінці лінії стався розрив, а напруга на початку лінії залишилась незмінною

$$U_{2x0} := \frac{U_1}{\cosh(\gamma_{10} \cdot L_1)} = 1.414 \times 10^3 \quad \text{В} \quad \text{POL}(U_{2x}) = (413.636 \quad -42.547) \quad \text{В}$$

$$\text{POL}(U_{2x0}) = (1.414 \times 10^3 \quad 0) \quad \text{В}$$

$$I_{11x0} := \left(\frac{U_{2x0}}{Z_c} \right) \cdot \sinh(\gamma_{10} \cdot 1.125 \cdot \lambda_1) = 1.177i \quad \text{А} \quad \text{POL}(I_{1nx}) = (1.176 \quad 4.907) \quad \text{А}$$

$$\text{POL}(I_{11x0}) = (1.177 \quad 90) \quad \text{А}$$

$$U_{1x0}(x) := U_{2x0} \cdot \cosh(\gamma_{10} \cdot x)$$

$$I_{1x0}(x) := \left(\frac{U_{2x0}}{Z_c} \right) \cdot \sinh(\gamma_{10} \cdot x)$$

$$Z_{\text{Bx}1x0}(x) := \frac{U_{1x0}(x)}{I_{1x0}(x)} \quad \varphi_{\text{Bx}1x0}(x) := \arg(Z_{\text{Bx}1x0}(x)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

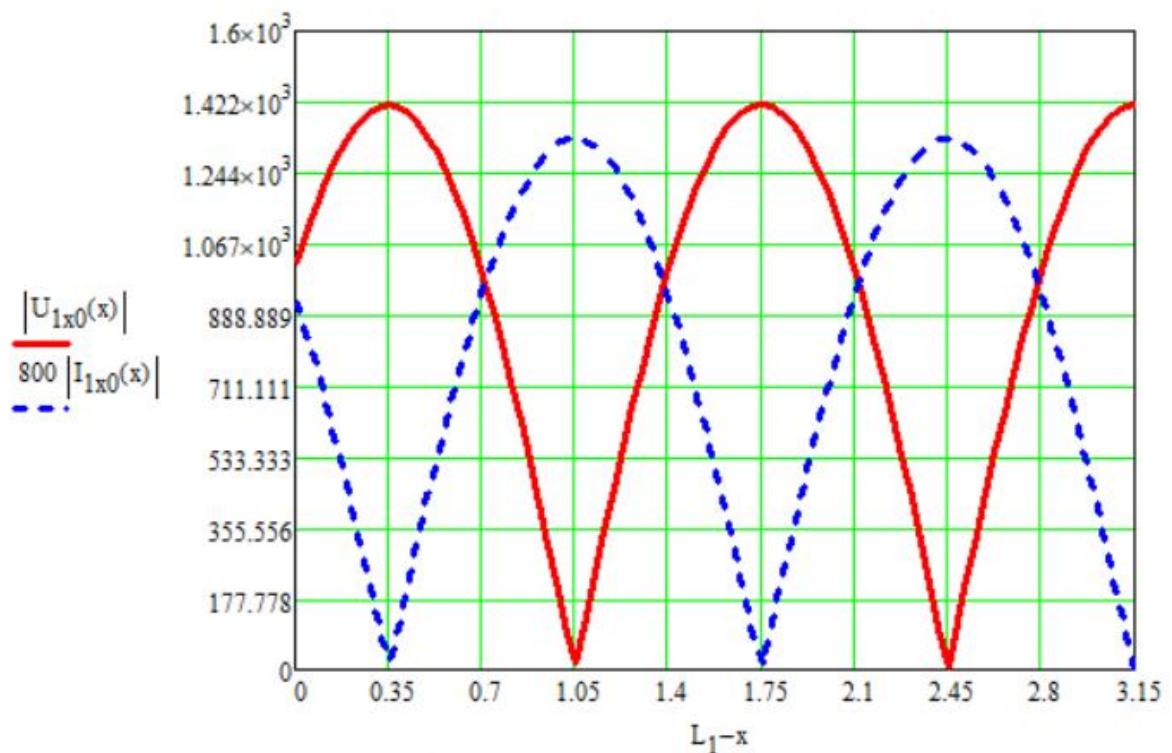


Рисунок 2.20 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії без втрат (неробочий хід)

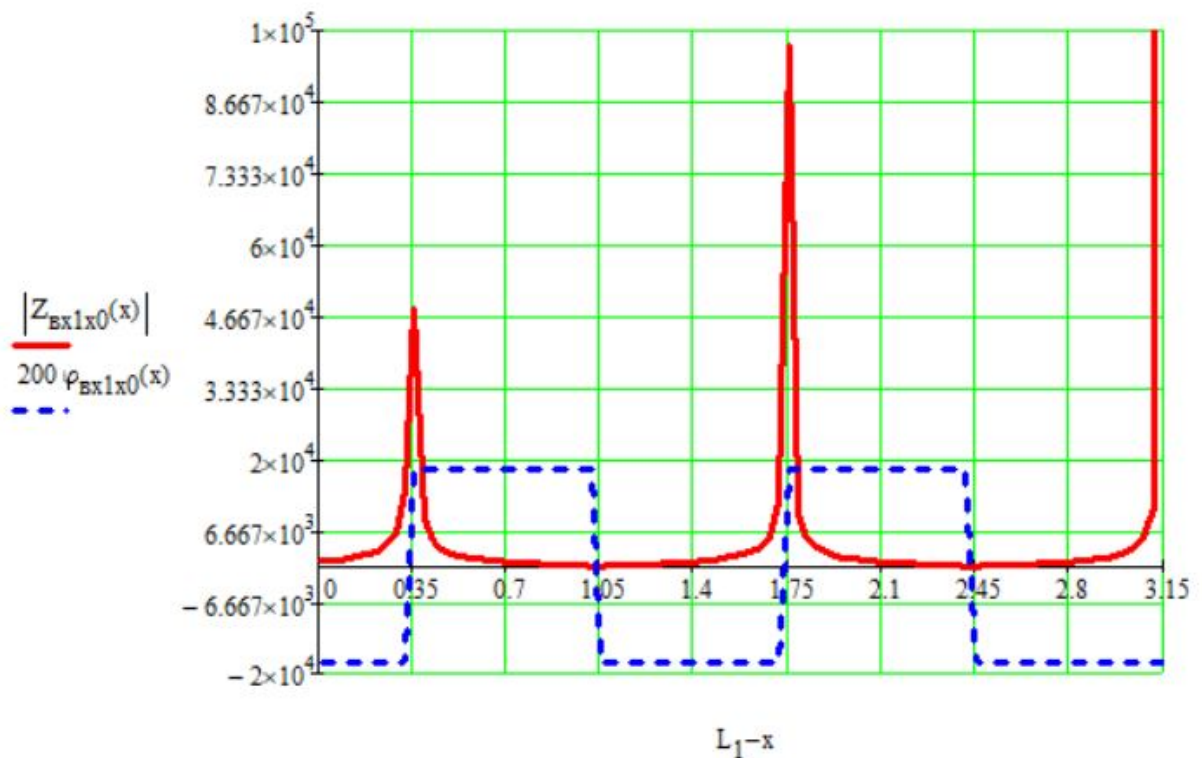


Рисунок 2.21 - Графіки розподілу модуля Z_{Bx} та його аргументу уздовж лінії без втрат (неробочий хід)

4.3 Враховуючи, що знайдена в п.1 потужність навантаження P_2 повинна бути передана узгодженою ідеальною лінією, визначимо комплекс потрібної напруги U_1 на вході, комплекс струму I_1 генератора та коефіцієнт потужності

$$P_{20} := \operatorname{Re}(S_{20}) = 462.25 \quad \text{Вт}$$

$$P_2 = 31.693 \quad \text{Вт}$$

$$Z_c = 850 \quad \text{Ом}$$

$$\text{Струм навантаження} \quad I_{2y0} := \sqrt{\frac{P_{20}}{Z_c}} = 0.737 \quad \text{А} \quad I_{2y} = 0.193 \quad \text{А}$$

$$\text{Напруга на навантаженні} \quad U_{2y0} := I_{2y0} \cdot Z_c = 626.827 \quad \text{В} \quad U_{2y} = 164.132 \quad \text{В}$$

Розподіл струму та напруги уздовж лінії

$$U_{y0}(x) := U_{2y0} \cdot e^{\gamma_{10} \cdot x} \quad I_{y0}(x) := I_{2y0} \cdot e^{\gamma_{10} \cdot x}$$

Напряга та струм на початку лінії без втрат

$$\text{POL}(U_{1y}) = (792.878 \quad 45.001) \quad \text{В}$$

$$U_{1y0} := U_{2y0} \cdot e^{\gamma_{10} \cdot L_1} = 443.226 + 443.241i \quad \text{В}$$

$$\text{POL}(U_{1y0}) = (626.827 \quad 45.001) \quad \text{В}$$

$$\text{POL}(I_{1y}) = (0.933 \quad 45.001) \quad \text{В}$$

$$I_{1y0} := I_{2y0} \cdot e^{\gamma_{10} \cdot L_1} = 0.521 + 0.521i \quad \text{В}$$

$$\text{POL}(I_{1y0}) = (0.737 \quad 45.001) \quad \text{В}$$

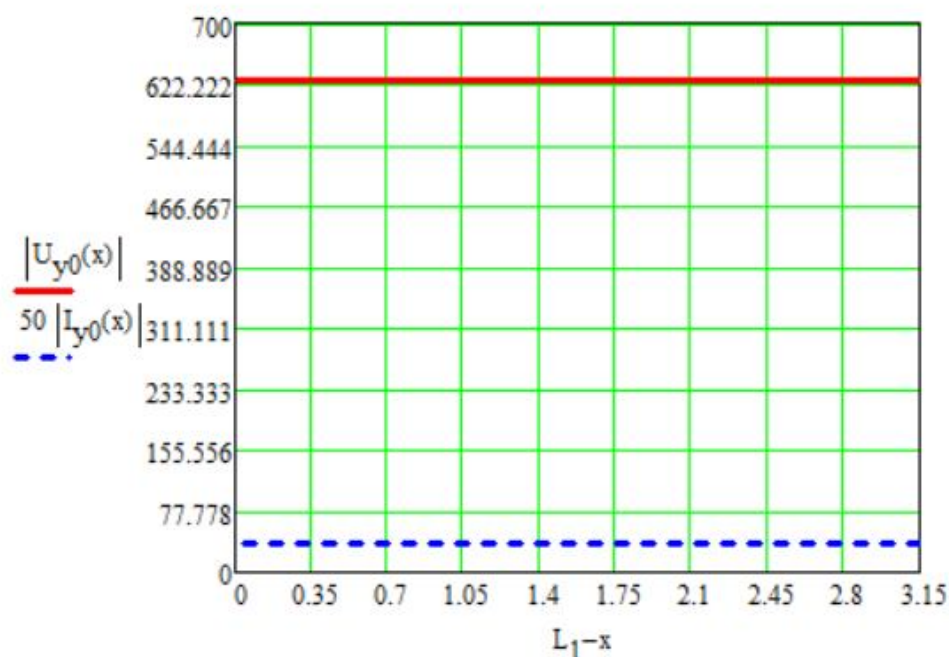


Рисунок 2.22 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії без втрат (узгоджене навантаження)

Потужність на початку лінії $P_{1y0} := |U_{1y0}| \cdot |I_{1y0}| = 462.25 \quad \text{Вт} \quad P_{1y} = 739.595 \quad \text{Вт}$

Потужність на початку лінії $P_{1y0} := |U_{1y0}| \cdot |I_{1y0}| = 462.25 \quad \text{Вт} \quad P_{1y} = 739.595 \quad \text{Вт}$

Коефіцієнт корисної дії $\eta_{y0} := \frac{P_{20}}{P_{1y0}} = 1 \quad \eta_y = 0.043$

$$Z_{\text{вх1y0}}(x) := \frac{U_{y0}(x)}{I_{y0}(x)} \quad \varphi_{\text{вх1y0}}(x) := \arg(Z_{\text{вх1y0}}(x)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

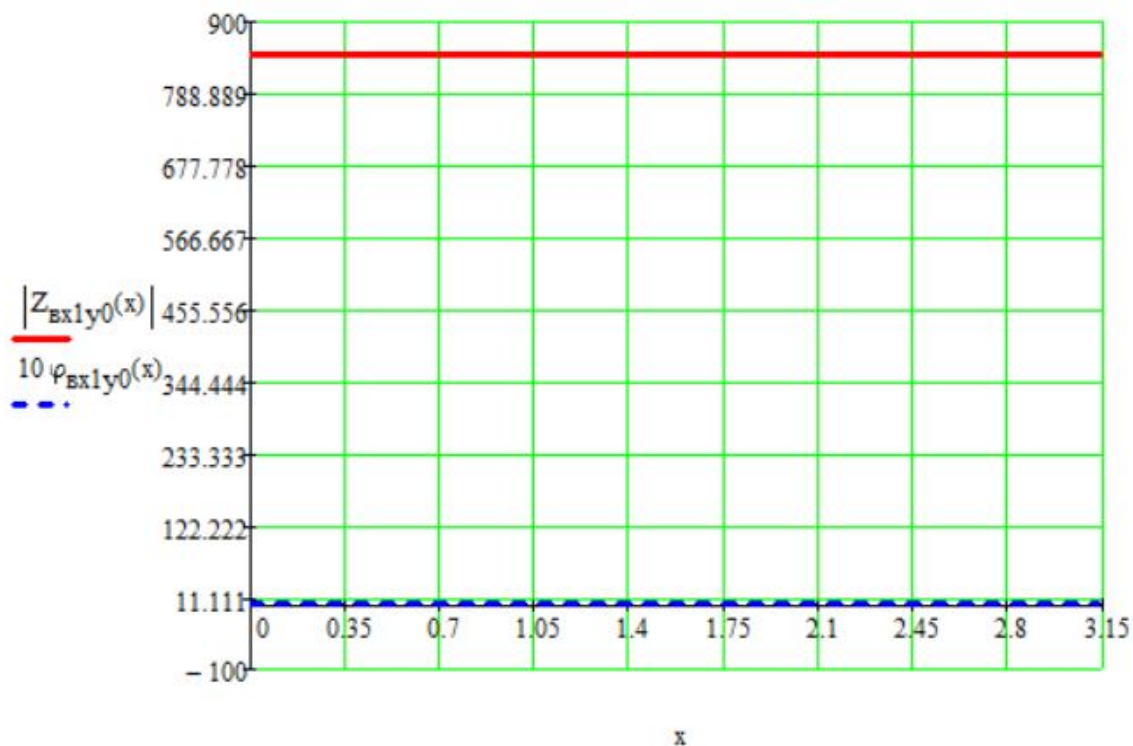


Рисунок 2.23 - Графіки розподілу діючих значень напруги та струму уздовж лінії без втрат

Перевірмо наявність прямої та зворотної хвилі напруги, що поширюється уздовж лінії з втратами за рівняннями

$$A_1 := \frac{U_1 + I_1 \cdot Z_c}{2} \quad A_2 := \frac{U_1 - I_1 \cdot Z_c}{2}$$

Пряма хвиля $U_{\text{пр}}(x) := A_1 \cdot e^{-(\gamma_1 \cdot x)}$ Зворотна хвиля $U_{\text{зв}}(x) := A_2 \cdot e^{(\gamma_1 \cdot x)}$

$$U_{\text{вх}}(x) := A_1 \cdot e^{-(\gamma_1 \cdot x)} + A_2 \cdot e^{(\gamma_1 \cdot x)}$$

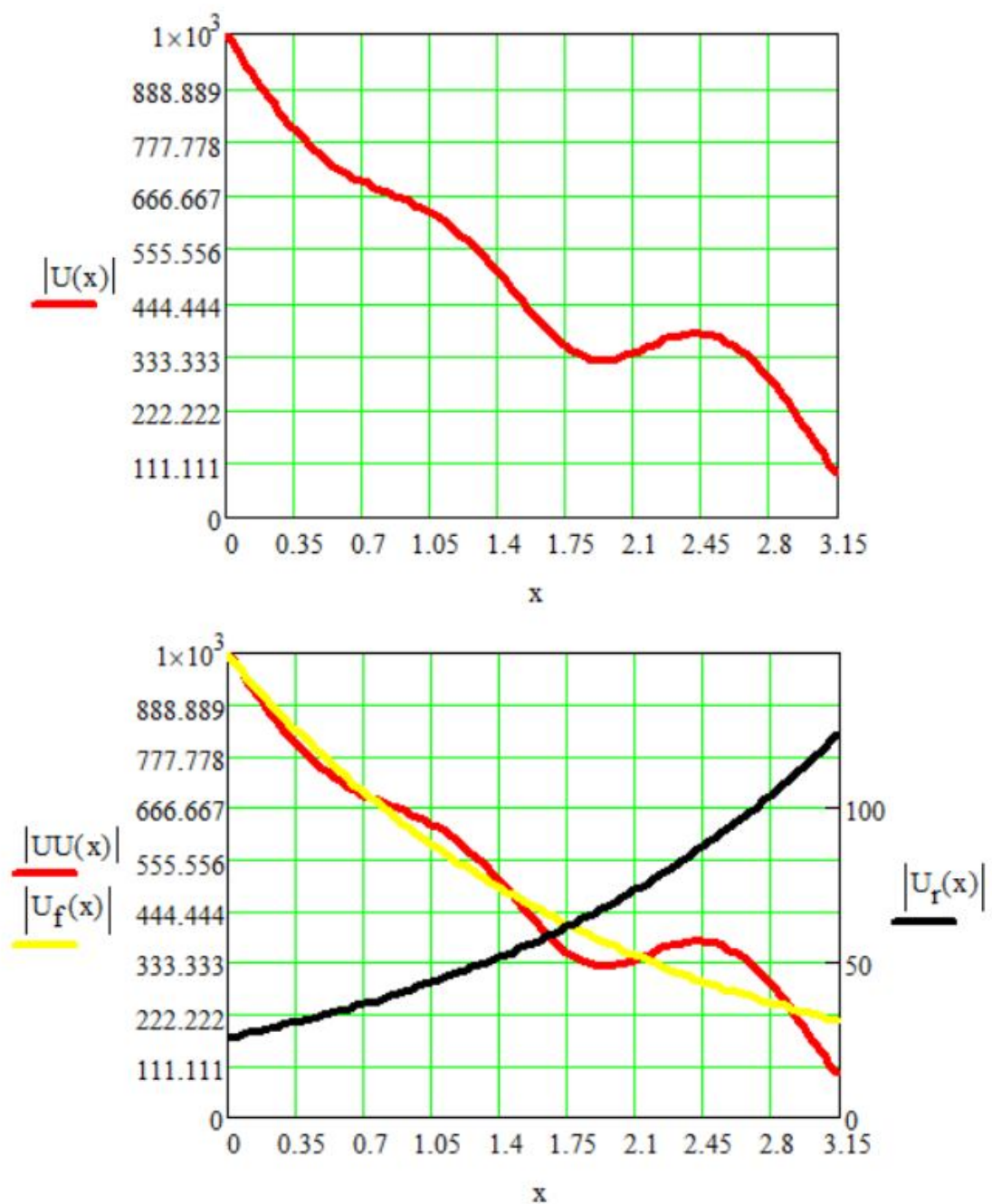


Рисунок 2.24 - Графіки розподілу діючих значень напруги уздовж лінії з втратами

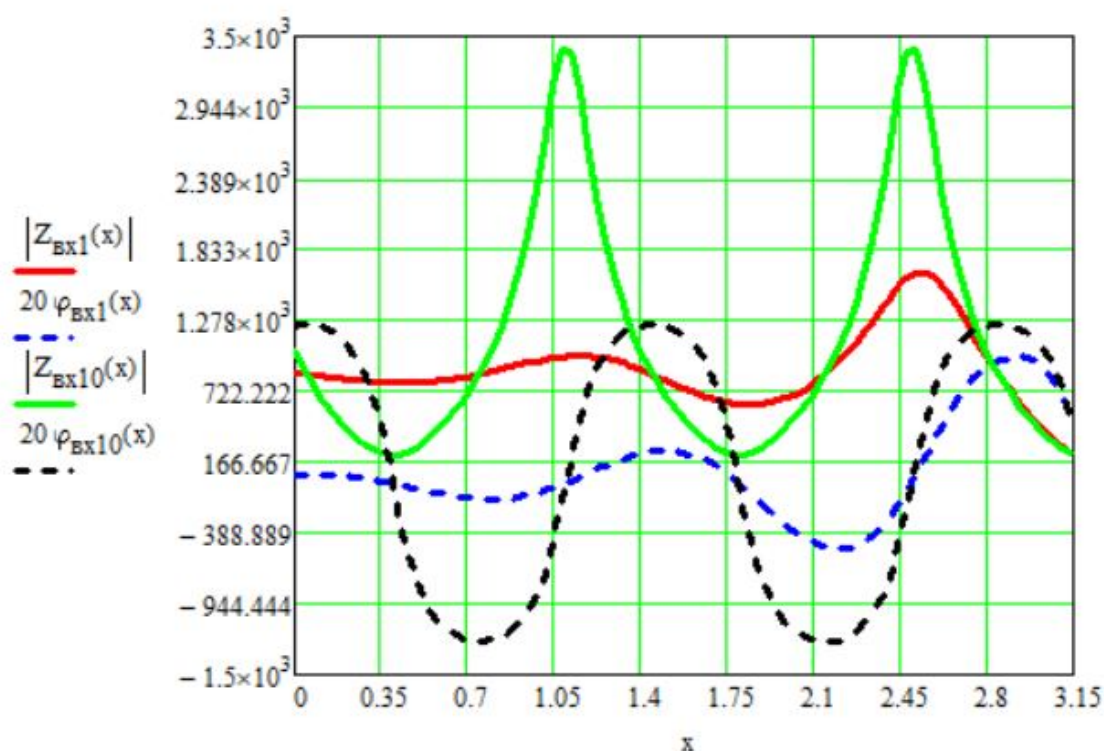


Рисунок 2.25 - Графіки розподілу модуля Z_{BX} та його аргументу уздовж лінії з втратами та ідеальної лінії

Бібліографічний список використаної літератури

1. Бойко В.С., Бойко В.В., Видолоб Ю.Ф., Курило І.А., Шеховцов В.І. та Шидловська Н.А. Теоретичні основи електротехніки: підручник: У 3 т. / За заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. – К.: НТУУ “КПІ”, 2013. – 244 с.
2. Курило І.А. Електричні кола з розподіленими параметрами. Усталені режими: навч. посіб./ І.А. Курило, І.Н. Намацалюк, В.І. Шеховцов. – К.: НМК ВО, 1993. – 96 с.
3. Торбенков Г.М. Установившиеся процессы в цепях с распределенными параметрами: учебное пособие / Г.М. Торбенков, Л.И. Степанова. – Ч.: Челябинский политехнический институт, 1976. – 32 с.

Лабораторна робота № 3

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ДВОПРОВІДНОЇ ЛІНІЇ

ПОЛЕМ СТРУМУ У ПРОВІДНОМУ ЛИСТІ

Мета роботи: ознайомитися з принципами моделювання електричних та магнітних полів. З'ясувати аналогії між картинами статичного електричного поля у провідному середовищі та електростатичного поля в діелектрику.

Ознайомитися з методикою побудови картини електричного поля двопровідної лінії.

Тривалість роботи: 4 години.

1. Основні теоретичні відомості

Під *електромагнітним полем* розуміють вид матерії, який характеризується сукупністю взаємопов'язаних електричного та магнітного полів, що взаємно обумовлюють один одного. Силний вплив поля на електричні заряди та струми покладено в основу визначення векторних величин, якими характеризують поле – напруженості електричного поля \vec{E} та індукції магнітного поля \vec{B} . Електромагнітне поле може самостійно існувати у вигляді електромагнітних хвиль та має характеристики, що притаманні речовині, а саме: маса, енергія та кількість руху.

Електростатичне поле – це окремий вид електромагнітного поля, що створюються сукупністю електричних зарядів, які нерухомі у просторі по відношенню до спостерігача та незмінні у часі. Напруженість електричного поля є векторною величиною, яка визначається у кожній точці величиною та напрямком (*напруженість чисельно дорівнює силі, яка діє на заряд, за величиною рівною одиниці $\vec{f} = q\vec{E}$*). Потенціал є скалярною величиною та визначається у кожній точці поля деяким числом (*потенціал довільної точки можна визначити як роботу, що здійснюється силами поля по переносу*

одиночного додатного заряду з даної точки поля у точку поля, потенціал якої дорівнює нулю $\varphi = \int \vec{E} d\vec{l}$) [2].

Поле зарядженої вісі

Під *зарядженою віссю* розуміють тонкий теоретично нескінченно довгий металевий провідник, заряд на одиницю довжини якого прийнято позначати τ . Діелектрична проникність середовища, що охоплює вісь дорівнює ϵ_a . Для знаходження напруженості поля \vec{E} у деякій точці, що знаходиться на відстані r від осі (рис. 3.1), потрібно провести через цю точку циліндричну поверхню так, щоб вісь циліндричної поверхні співпала з зарядженою віссю.

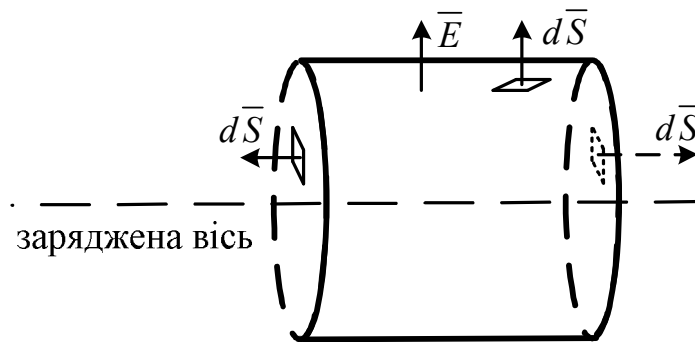


Рисунок 3.1 – Знаходження напруженості поля у довільній точці

Відповідно до теореми Гауса, потік вектора \vec{E} проходить тільки через бокову поверхню циліндра. Внаслідок симетрії в полі є тільки радіальна складова вектора напруженості [3]. Через основи циліндра потік \vec{E} відсутній, оскільки елемент поверхні $d\vec{S}$ кожної основи перпендикулярний до \vec{E} .

Елементи $d\vec{S}$ бокової поверхні та напруженість електричного поля \vec{E} у будь-якій точці циліндричної поверхні за напрямком співпадають, тому

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{вісь}}}{\epsilon_a}; \quad E 2\pi r l = \frac{\tau l}{\epsilon_a} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{r}}. \quad (3.1)$$

де l - довжина провідника, м, $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$ - абсолютна діелектрична проникність, що характеризує діелектричні властивості діелектрика, скалярна для ізотропної речовини, Ф/м; ε - відносна діелектрична проникність; $\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ - електрична проникність вакууму (електрична стала), Ф/м.

Напруженість у полі зарядженої вісі вимірюється обернено пропорційно відстані r точки від осі [2]. Потенціал вимірюється за логарифмічним законом

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad}\varphi; \\ \varphi &= -\int E dr = -\int \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_a} dr = -\frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_a} \ln r + C = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_a} \ln \frac{1}{r} + C. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поле двох паралельних заряджених осей

Нехай одна вісь має лінійну щільність заряду $+\tau$, інша - заряду $-\tau$. Відстань між осями дорівнює $2a$. Початок прямокутної системи координат точка O , потенціал якої вважаємо нульовим ($\varphi_O = 0$). Спрощена картина електростатичного поля двох заряджених осей зображена на рис. 3.2 ліворуч від початку координат.

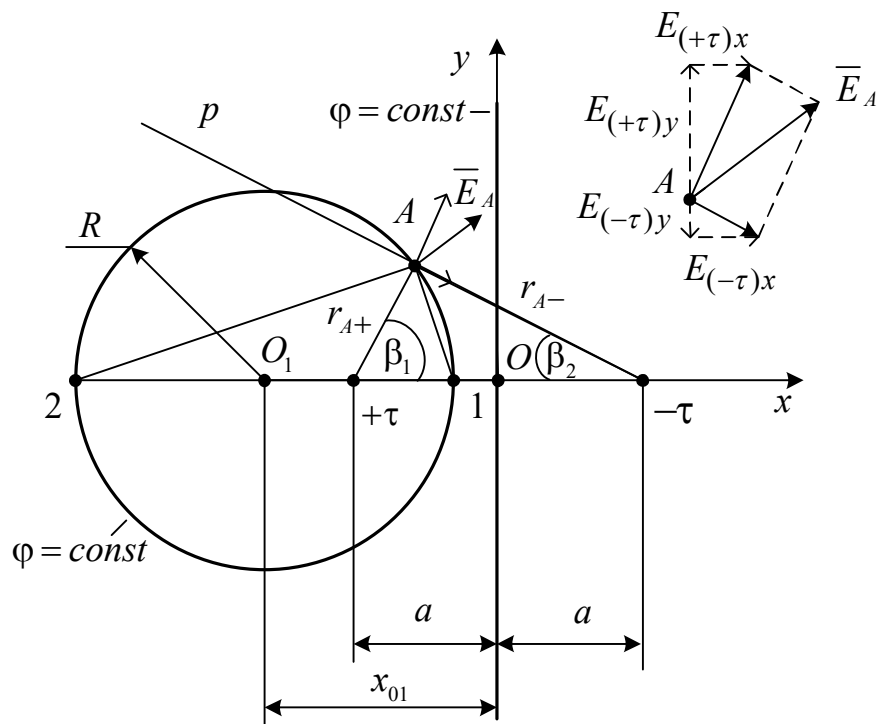


Рисунок 3.2 – Поле двох паралельних заряджених осей

Результуюча напруженість поля у точці A \vec{E}_A дорівнює геометричній сумі напруженості від обох зарядів $(+\tau, -\tau)$. Потенціал точки A дорівнює сумі потенціалів від кожної осі [4]:

$$\begin{aligned}\varphi'_A &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a}{r_{A+}} - \text{потенціал, що обумовлений зарядом } +\tau; \\ \varphi''_A &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a}{r_{A-}} - \text{потенціал, що обумовлений зарядом } -\tau; \\ \boxed{\varphi_A = \varphi'_A + \varphi''_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_{A-}}{r_{A+}} + C} &- \text{повне значення потенціалу у точці } A,\end{aligned}\tag{3.3}$$

Лінія однакового потенціалу (еквіпотенціальна лінія) представляє сукупність точок $(\varphi = \text{const}, B)$, відношення відстаней яких до двох заряджених точок є величиною постійною, у вигляді кола рис. 3.2. Ці лінії $(\varphi = \text{const}, B)$ задовольняють умові

$$\frac{r_{A-}}{r_{A+}} = k = \text{const}.\tag{3.4}$$

З'єднаємо точку A з осями (рис. 3.2). Проведемо бісектриси внутрішнього $\angle r_{A+} A r_{A-}$ та зовнішнього $\angle p A r_{A+}$ кутів. Точки 1 та 2 перетину бісектрис лінією, яка проведена через заряджені вісі, та точку A будуть трьома точками шуканого кола [2]. Для знаходження положення центру кола (точки O_1) треба поділити навпіл відстань між точками 1 та 2.

Запишемо рівняння кіл для еквіпотенціальних ліній поля двох паралельних різнойменно-заряджених осей [4]

$$\begin{aligned}(r_{A+})^2 &= (a+x)^2 + y^2; \quad (r_{A-})^2 = (a-x)^2 + y^2; \\ k^2 &= \frac{(r_{A-})^2}{(r_{A+})^2} = \frac{(a-x)^2 + y^2}{(a+x)^2 + y^2}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Звільнившись від знаменника та привівши подібні члени, отримаємо

$$\begin{aligned}
 (k^2 - 1)(x^2 + y^2 + a^2) + (k^2 + 1)(2ax) &= 0; \\
 (x + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}a)^2 + y^2 &= (\pm a \frac{2k}{k^2 - 1})^2 - \text{рівняння кола}; \\
 R &= \pm a \frac{2k}{k^2 - 1} - \text{радіус кола}; \\
 x_0 &= -a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} - \text{координати центру кола при } (y_0 = 0).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Кола, які відповідають $k > 1$, розташовані ліворуч від зображеного початку координат; кола, що відповідають $k < 1$, розташовані праворуч від початку координат. Між величинами R, a, x_0 є проста відповідність [4]

$$\begin{aligned}
 x_0^2 - R^2 &= a^2 \left\{ \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{2k}{k^2 - 1} \right)^2 \right\} = a^2 \left\{ \frac{k^4 + 2k^2 + 1 - 4k^2}{(k^2 - 1)^2} \right\} = a^2; \\
 R^2 &= x_0^2 - a^2 = \frac{4k^2 a^2}{(k^2 - 1)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вирішивши рівняння (3.6) для R відносно k та застосувавши співвідношення (3.7) та (3.4), отримаємо наступні вирази для k та φ [4]

$$k^2 = 1 + 2 \frac{a^2}{R^2} \pm 2 \frac{a}{R} \sqrt{1 + \frac{a^2}{R^2}}; \quad 1 + \frac{a^2}{R^2} = \frac{x_0^2}{R^2}; \quad \boxed{k = \frac{x_0 \pm a}{R}; \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{x_0 \pm a}{R}}. \tag{3.8}$$

Позитивний знак у чисельнику відноситься до точок, що розташовані ліворуч від початку координат (позитивно заряджена вісь). Від'ємний знак у чисельнику відноситься до точок, що розташовані праворуч від початку координат (негативно заряджена вісь).

Визначимо вектор напруженості електростатичного поля у точці A , що обумовлена зарядом $+\tau$ (рис. 3.2) [4]:

$$\begin{aligned}
E_{(+\tau)x} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r_{A+}} \cos \beta_1, \text{— складова за віссю } x; \\
E_{(+\tau)y} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r_{A+}} \sin \beta_1, \text{— складова за віссю } y.
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

Визначаємо компоненту напруженості поля, яка обумовлена зарядом $-\tau$

$$\begin{aligned}
E_{(-\tau)x} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r_{A-}} \cos \beta_2, \text{— складова за віссю } x; \\
E_{(-\tau)y} &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r_{A-}} \sin \beta_2, \text{— складова за віссю } y.
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Повний вираз напруженості електростатичного поля є наступним [4]

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left\{ \left(\frac{\cos \beta_1}{r_{A+}} + \frac{\cos \beta_2}{r_{A-}} \right) \vec{i} + \left(\frac{\sin \beta_1}{r_{A+}} - \frac{\sin \beta_2}{r_{A-}} \right) \vec{j} \right\}; \\
E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \text{— числове значення напруженості поля;} \\
E &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \sqrt{\frac{1}{(r_{A+})^2} + \frac{1}{(r_{A-})^2} + \frac{2}{(r_{A+})(r_{A-})} \cos(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \frac{a}{(r_{A+})(r_{A-})}.
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

де β_1, β_2 - кути, відповідно між відрізками r_{A+} або r_{A-} та лінією яка проходить через електричні осі $+\tau$ та $-\tau$.

Поряд з теоретичним розрахунком та безпосереднім експериментальним дослідженням електричних полів велике практичне значення має дослідження цих полів шляхом моделювання.

У основу моделювання покладено той факт, що різні поля описуються подібними за структурою рівняннями. Наприклад, постійне електричне поле в діелектрику за відсутності об'ємних зарядів та постійне електричне поле у провідному середовищі в області поза джерелами ЕРС описуються аналогічними рівняннями [1]

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \left(\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \right); \quad \vec{D} = \epsilon_a \vec{E}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \left(\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \right); \quad \vec{\delta} = \gamma \vec{E}; \quad \operatorname{div} \vec{\delta} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля; \vec{D} – вектор електричного зміщення в електростатичному полі; $\vec{\delta}$ – вектор густини електричного струму в провідному середовищі; φ – потенціал електричного поля; γ – питома електрична провідність, що характеризує електропровідність речовини, скалярна для ізотропного середовища.

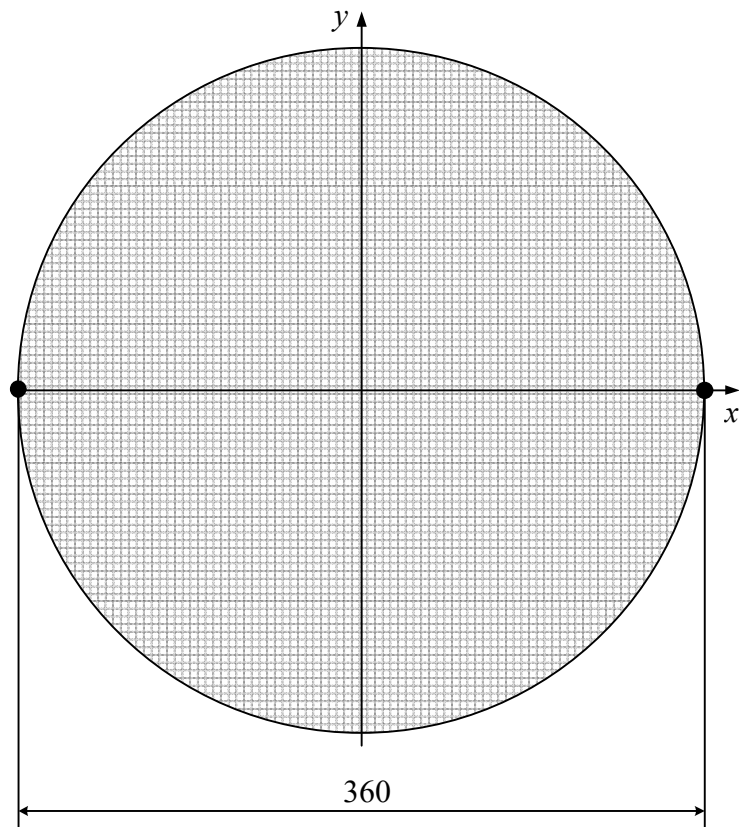


Рисунок 3.3 - Шаблон провідного листа для верхньої пари затискачів

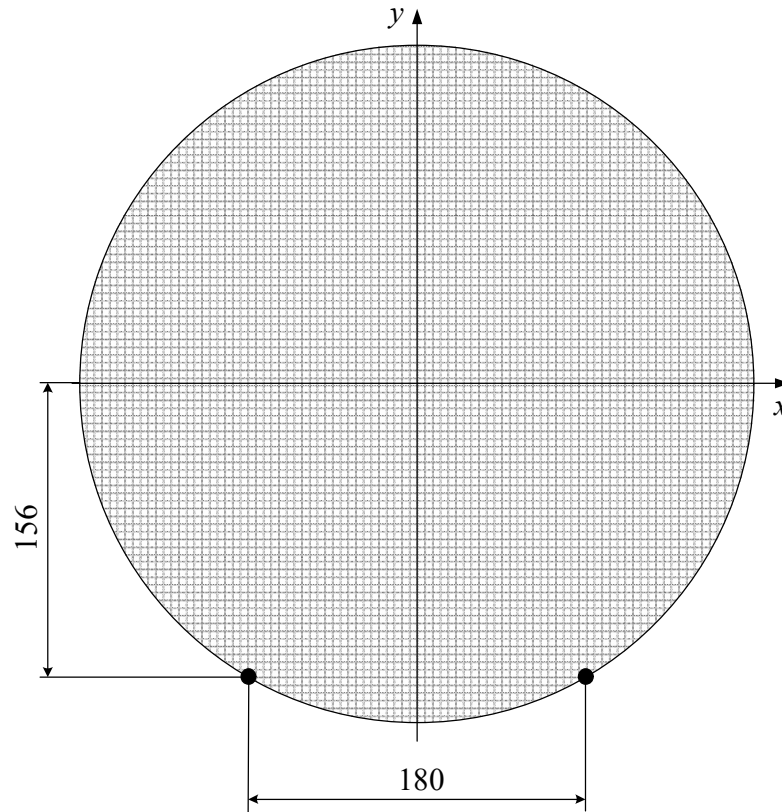


Рисунок 3.4 - Шаблон провідного листа для нижньої пари затискачів

Тому, якщо однакові геометричні конфігурації областей простору, в яких існують ці поля, якщо аналогічні граничні умови на межі областей та подібні відносні розподілення значень ε і γ усередині областей, то картини цих полів будуть подібні [1].

З рівнянь (3.12) випливає, що вектору \overline{D} електростатичного поля формально аналогічний вектор $\overline{\delta}$ електричного поля струму у провідному середовищі, а величині ε – величина γ [1].

Як відомо, на межі розділу двох середовищ з різною діелектричною проникністю залишаються незмінними нормальні складові вектора \overline{D} та дотичні складові вектора \overline{E} . Аналогічно на межі розділу двох середовищ з різною питомою провідністю залишаються незмінними нормальні складові вектора $\overline{\delta}$ та дотичні складові вектора \overline{E} [1].

Крім того, в електричному полі провідне тіло, що несе заряд, межує з

діелектриком поверхнею однакового потенціалу i , отже, вектор \vec{D} до неї нормальний. У разі проходження струму у середовищі з відносно малою питомою провідністю можна знехтувати падінням напруги всередині провідного тіла з високою питомою провідністю та вважати поверхню останнього еквіпотенціальною (вектор $\vec{\delta}$ буде до неї нормальним) [1].

Геометричну подібність областей, в яких існують поля, забезпечують шляхом вибору відповідної конфігурації провідного листа та електродів для підведення струму. У разі однорідного та ізотропного матеріалу провідного листа, вимога аналогічного розподілу значень ε і γ виконується автоматично [1].

Встановлена аналогія рівнянь та граничних умов дозволяє замінити дослідження електростатичного поля експериментальним дослідженням поля струму в провідному середовищі та навпаки [1].

Для дослідження плоско-паралельних полів використовуються металеві листи або листи з провідного паперу, вирізані за певною формою, що зображує область досліджуваного поля. Для дослідження як плоско-паралельних, так і просторових полів, широко використовується метод моделювання в електролітичній ванні [1].

У лабораторній роботі двопровідна лінія подана двома циліндричними нескінченно довгими паралельними електродами, відстань між якими у багато разів більша від їх діаметра. Електроди виготовлені з міді та мають досить велику питому провідність, вони оточені середовищем (сталевий лист), питома провідність якого набагато менша провідності електродів. За наявності напруги між електродами, картина електричного поля струму в середовищі, що оточує електроди, збігається з картиною електричного поля в діелектрику, що оточує заряджену двопровідну лінію передачі [1].

У відповідності із тим, що відомо з теорії про картину електричного поля двопровідної лінії, можна стверджувати, що *лінії струму* в провідному середовищі будуть колами, що проходять через електричні осі електродів, а

лінії *однакового потенціалу* в площинах, перпендикулярних до осей електродів, утворюють родину ексцентричних кіл з центрами на прямій, що проходить через осі електродів. Оскільки діаметри перетинів електродів малі порівняно з відстанню між ними, електричні осі практично збігаються з геометричними осями електродів [1].

Для дослідження такого поля досить із середовища з малою електропровідністю вирізати його частину, обмежену з усіх боків лініями струму. Саме такою частиною є досліджуваний круглий плоский сталевий лист. Граничне коло листа, як межа провідного середовища, утворює лінію струму [1].

Плоскі поверхні листа відповідають двом площинам, які перпендикулярні до нескінченно довгих паралельних провідників лінії передачі. Лінії напруженості у полі паралельні до цих площин. Бокова циліндрична поверхня листа відповідає циліндричним поверхням, які створюються в електростатичному полі лініями напруженості, що є дугами кіл однакового радіусу [1].

Дослід полягає у тому, щоб отримати на сталевому листі (на провідному папері) родину ліній однакового потенціалу. З цією метою модель приєднують до джерела постійного струму, значення якого підтримують незмінним за допомогою реостата. Для отримання симетричного розміщення ліній однакового потенціалу, за початкову точку вибирають центр кола. Дотикаючись одним із щупів, що приєднаний до гальванометра, початкової точки, шукають іншим щупом ще декілька точок однакового потенціалу (гальванометр у цих точках не повинен давати відхилення стрілки). Об'єднуючи між собою знайдені точки, отримуємо початкову лінію однакового потенціалу [1].

Задавши різницю потенціалів між сусідніми еквіпотенціальними лініями 5–20 поділок гальванометра, знаходимо точки сусідньої лінії однакового потенціалу. Перенесемо щуп гальванометра на отриману лінію

однакового потенціалу і таким же чином визначимо точки наступної лінії. Остання лінія однакового потенціалу повинна розташовуватися не ближче 20..30 мм від затискача, що підводить струм до моделі [1].

Виходячи з симетрії картини поля досить зняти лінії однакового потенціалу тільки на одній половині листа (ліворуч чи праворуч від початкової лінії).

Отриману картину ліній однакового потенціалу переносять на лист паперу (рис. 3.3 чи рис. 3.4) з допомогою координатної сітки або пантографа. На цей рисунок наносимо розраховані теоретичні лінії однакового потенціалу та лінії напруженості [1].

Лінії однакового потенціалу (пунктирні лінії) у такому разі є колами з центрами на прямій, що проходить через центри затискачів, призначених для підведення струму (рис. 3.5).

Відстань центрів цих кіл від середньої прямої лінії однакового потенціалу визначаються за формулою

$$|x_0| = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b \quad (3.13)$$

Їхні радіуси знаходяться з виразу

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|} b \quad (3.14)$$

де b – половина відстані між центрами затискачів для підведення струму (електричні осі збігаються з геометричними осями електродів $a = b$).

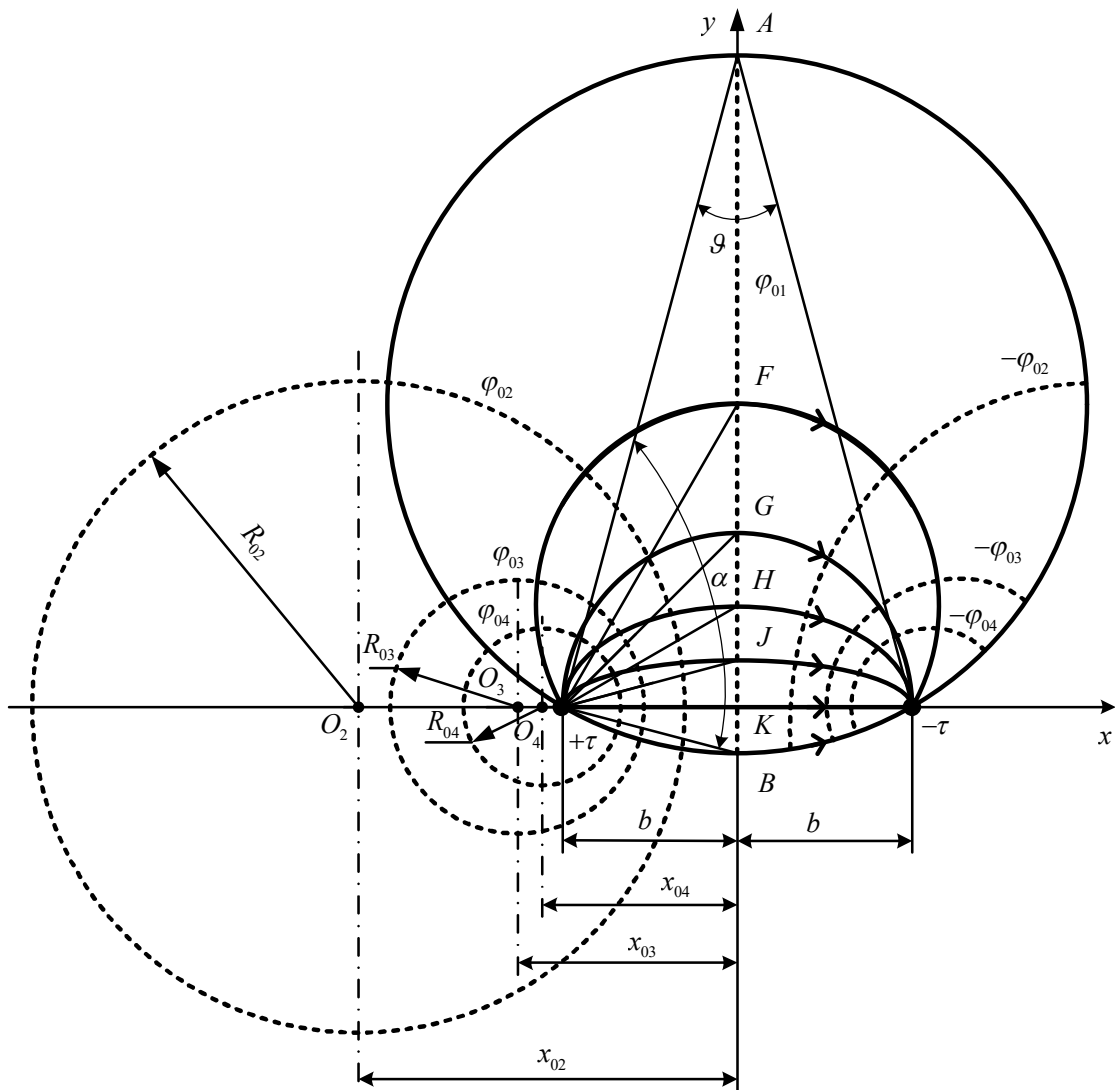


Рисунок 3.5 – Графічне зображення (картина) електростатичного поля

Число k характеризує лінію однакового потенціалу (наприклад дуга φ_{02}) та дорівнює відношенню відстані будь-якої точки цієї лінії до електричних осей провідників $(+\tau, -\tau)$. Для середньої лінії (наприклад дуга $\varphi_{01} = 0$), очевидно, $k_1 = 1$.

Для кожної лінії, знятої експериментально (суцільна лінія), визначають величину k у трьох чи п'яти точках цієї лінії, а потім усереднюють отримані значення (рис. 3.6).

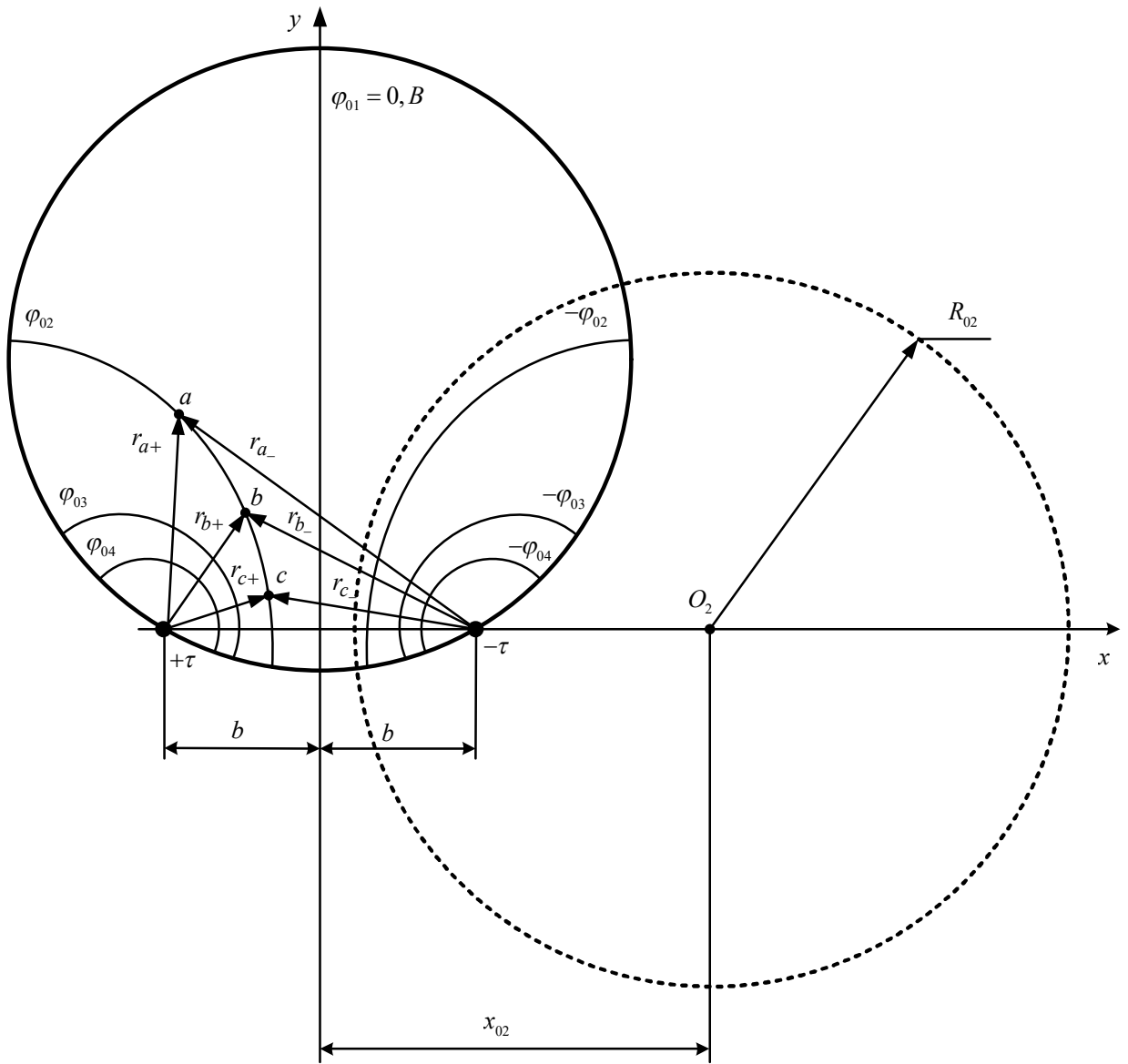


Рисунок 3.6 – Графічне зображення експериментальних та теоретичних ліній однакового потенціалу

Щоб приріст потенціалу під час переходу від будь-якої лінії однакового потенціалу до сусідньої залишався постійним, числа k при зростанні порядкового номера лінії повинні змінюватися у геометричній прогресії

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = B = \text{const}, n=\overline{1, N};$$

$$B = \sqrt[n]{\frac{k_{n+1}}{k_1}}. \quad (3.15)$$

Тому для кожної пари ліній однакового потенціалу, що зняті дослідним

шляхом, починаючи від середньої ($k=1$), необхідно визначити значення числа B та усереднити його. Розглянемо лінію однакового потенціалу з потенціалом φ_{03} на рис. 3.6.

$$\begin{aligned}
k_{2a} &= \frac{r_{a-}}{r_{a+}} = \frac{211.8}{124.5} = 1.7; k_{3a} = \frac{r_{a-}}{r_{a+}} = \frac{220.5}{72.9} = 3.03; k_{4a} = \frac{r_{a-}}{r_{a+}} = \frac{209.1}{45.3} = 4.62; \\
k_{2b} &= \frac{r_{b-}}{r_{b+}} = \frac{149.4}{81.9} = 1.52; k_{3b} = \frac{r_{b-}}{r_{b+}} = \frac{166.5}{52.2} = 1.4; k_{4b} = \frac{r_{b-}}{r_{b+}} = \frac{174.9}{37.2} = 1.22; \\
k_{2c} &= \frac{r_{c-}}{r_{c+}} = \frac{121.5}{63.3} = 1.92; k_{3c} = \frac{r_{c-}}{r_{c+}} = \frac{137.4}{43.2} = 3.18; k_{4c} = \frac{r_{c-}}{r_{c+}} = \frac{149.1}{31.5} = 4.73; \\
k_2 &= \frac{k_{2a} + k_{2b} + k_{2c}}{3} = \frac{1.701 + 1.52 + 1.919}{3} = 1.714; \\
k_3 &= \frac{k_{3a} + k_{3b} + k_{3c}}{3} = \frac{3.025 + 1.397 + 3.181}{3} = 2.534; \\
k_4 &= \frac{k_{4a} + k_{4b} + k_{4c}}{3} = \frac{4.616 + 1.218 + 4.733}{3} = 3.522; \\
B_{21} &= \frac{k_2}{k_1} = \frac{1.714}{1} = 1.714; \\
B_{32} &= \frac{k_3}{k_2} = \frac{2.534}{1.714} = 1.478; \\
B_{43} &= \frac{k_4}{k_3} = \frac{3.522}{2.534} = 1.39; \\
B_{cp} &= \frac{B_{21} + B_{32} + B_{43}}{3} = \frac{1.714 + 1.478 + 1.39}{3} = 1.527; \\
B_{cp} &= {}^3\sqrt{\frac{k_4}{k_1}} = {}^3\sqrt{\frac{3.522}{1}} = 1.521.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Далі розраховуємо значення k_T для кожної теоретичної лінії однакового потенціалу

$$\begin{aligned}
k_{n+1} &= B_{cp} \cdot k_n; \\
k_{T1} &= 1; \\
k_{T2} &= B_{cp} \cdot k_{T1} = 1.527 \cdot 1 = 1.527; \\
k_{T3} &= B_{cp} \cdot k_{T2} = 1.527 \cdot 1.527 = 2.332; \\
k_{T4} &= B_{cp} \cdot k_{T3} = 1.527 \cdot 2.332 = 3.677.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Далі за формулами (3.13) і (3.14) визначаємо координату центру та радіус теоретичного кола лінії однакового потенціалу (пунктирна лінія)

$$\begin{aligned} |x_{02}| &= \frac{1 + k_{T2}^2}{|1 - k_{T2}^2|} b = \frac{1 + 1.527^2}{|1 - 1.527^2|} \cdot 90 = 225.163, \text{мм}; \\ R_{02} &= \frac{2k_{T2}}{|1 - k_{T2}^2|} b = \frac{2 \cdot 1.527}{|1 - 1.527^2|} \cdot 90 = 206.393 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогічним чином визначаємо $|x_{03}|, |x_{04}|, R_{03}$ та R_{04} .

Лінії струму (суцільна лінія рис. 3.6) є колами, що проходять через центри затискачів, через які підводиться струм. У електричному полі лініям передачі відповідають лінії вектора електричного зміщення. Бажано число трубок струму вибирати таким, щоб середня довжина комірки сітки поля була такою ж, як і ширина [1].

Нехай ϑ – кут, під яким видно відрізок, що з'єднує центри затискачів $(+\tau, -\tau)$, із точок, що належать зовнішній лінії струму. Щоб лінії струму ділили простір на трубки однакового струму, необхідно побудувати ці лінії одну за одною так, щоб кут ϑ при переході від кожної лінії до сусідньої збільшувався на одне і те ж значення $\Delta\vartheta$ [1].

Виконується це таким чином. Із центру одного затискача проводять прямі до діаметра AB (рис. 3.5). Кут α між цими прямими ділять на рівні частини $\Delta\alpha$, кількість яких дорівнює кількості трубок струму. Проводять промені, віддалені один від одного на кут $\Delta\alpha$. Точки перетину цих променів із середньою лінією однакового потенціалу належать шуканим лініям струму [1].

Лінійні рівняння, які описують силові лінії (лінії вектора напруженості електростатичного поля або лінії дії сил поля) різнойменно-заряджених паралельних осей (рис. 3.7), є наступними [5]

$$d\vec{l} = \lambda \vec{E};$$

$$dx = \lambda E_x, dy = \lambda E_y, dz = \lambda E_z;$$

$$\boxed{\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}} - \text{рівняння силової лінії}; z = 0;$$

$$\frac{\cancel{\frac{\tau}{2\pi\epsilon}} \frac{dx}{(\frac{\cos\theta_{+\tau}}{r_{c+}} - \frac{\cos\theta_{-\tau}}{r_{c-}})}}{\cancel{\frac{\tau}{2\pi\epsilon}}} = \frac{\cancel{\frac{\tau}{2\pi\epsilon}} \frac{dy}{(\frac{\sin\theta_{+\tau}}{r_{c+}} - \frac{\sin\theta_{-\tau}}{r_{c-}})}}{\cancel{\frac{\tau}{2\pi\epsilon}}};$$

$$\boxed{\cos\theta_{+\tau} - \cos\theta_{-\tau} = \frac{x+a}{r_{c+}} - \frac{x-a}{r_{c-}} = \text{const};}$$

$$\frac{dx}{(\frac{x+a}{(r_{c+})^2} - \frac{x-a}{(r_{c-})^2})} = \frac{dy}{(\frac{y}{(r_{c+})^2} - \frac{y}{(r_{c-})^2})};$$

$$\frac{dx}{(\frac{x+a}{y(r_{c+})^2} - \frac{x-a}{y(r_{c-})^2})} = \frac{dy}{(\frac{1}{(r_{c+})^2} - \frac{1}{(r_{c-})^2})}; u = \frac{x+a}{y}; v = \frac{x-a}{y};$$

$$\frac{dx}{(\frac{u}{(r_{c+})^2} - \frac{v}{(r_{c-})^2})} = \frac{dy}{(\frac{1}{(r_{c+})^2} - \frac{1}{(r_{c-})^2})};$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1+v^2}{1+u^2} \Rightarrow \text{arctg}(v) - \text{arctg}(u) = C' \Rightarrow \frac{v-u}{1+vu} = C;$$

$$\frac{y[(x-a) - (x+a)]}{y^2 + (x^2 - a^2)} = C;$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + \frac{2a}{C}y - a^2 = 0}.$$

(3.19)

де $d\vec{l}$ - вектор елемента дуги силової лінії;

λ - скалярний множник;

dx, dy, dz - прямокутні складові елемента $d\vec{l}$;

r_{c+}, r_{c-} - відстані від заряджених осей до точки $C(x, y)$ площини $z = 0$, у якій визначаються значення напруженості;

$\theta_{+\tau}, \theta_{-\tau}$ - кути між віссю абсцис та векторами $\vec{E}_{+\tau}, \vec{E}_{-\tau}$.

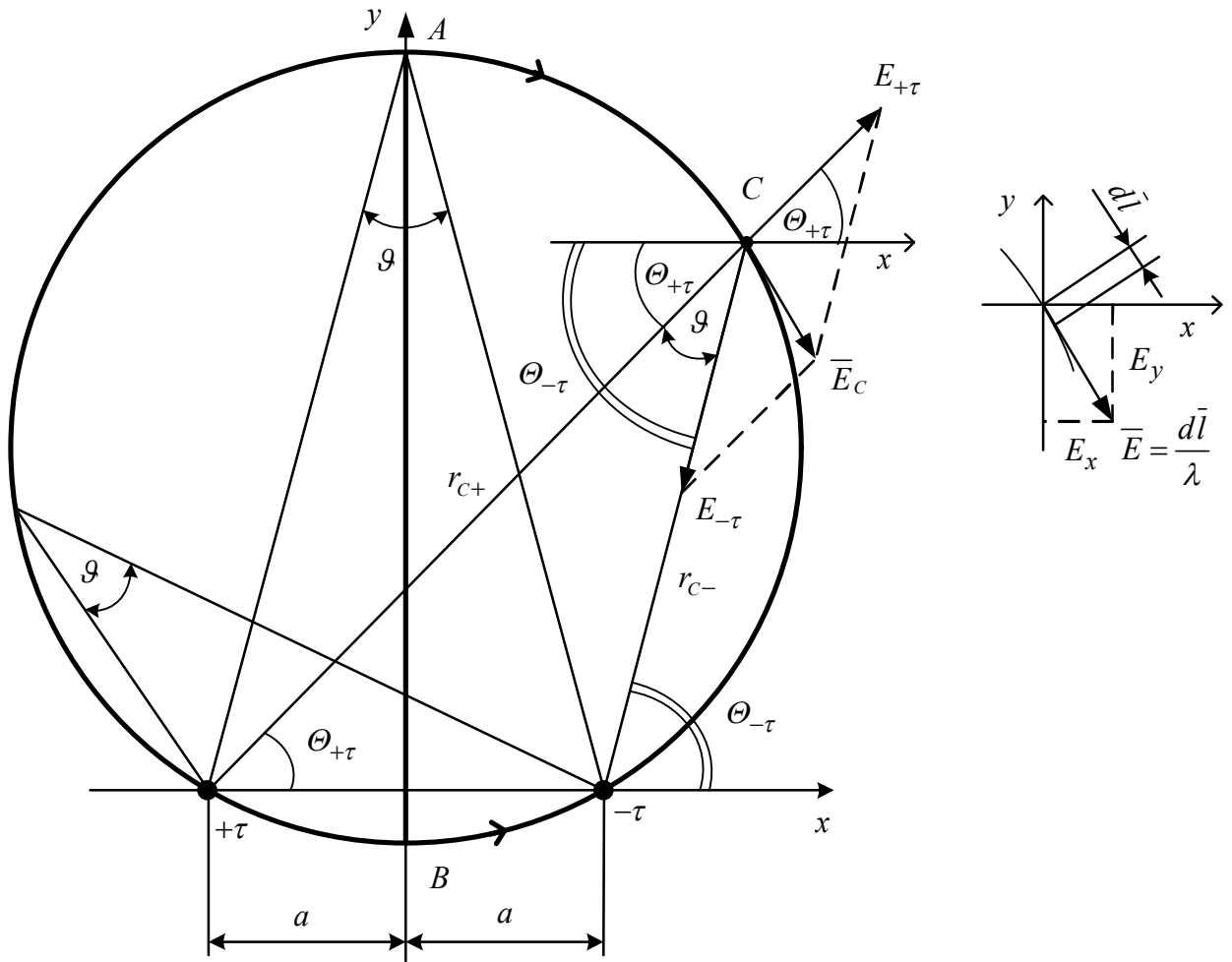


Рисунок 3.7 – Графічне зображення силової лінії електростатичного поля

Умові (3.19) задовольняє будь-яка точка $C(x, y)$ на колі, що проходить через осі електродів. Відрізок $2a$ видно з будь-якої точки цього кола під однаковим кутом $\vartheta = \theta_{-\tau} - \theta_{+\tau} = \text{const}$.

2. Опис лабораторної установки

2.1 Технічні характеристики і конструкція

Лабораторна установка складається з плоского круглого сталевого листа (аркуша з провідного паперу), на межі якого розміщені затискачі для підведення та відведення струму (рис. 3.8). Затискачі розміщені парами, кожна з яких розташована симетрично відносно середньої діаметральної лінії

листа. На лист накладається прямокутна сітка для визначення координат точок на поверхні листа. До будь-якої з пар затискачів через перемикач $SA1$ підводиться постійна напруга та через лист проходить постійний струм, значення якого задається викладачем. Незмінність значення струму під час досліду підтримується реостатом R_1 .

Для знаходження дослідним шляхом ліній однакового потенціалу установка містить гальванометр P , оснащений провідниками зі щупами [1].

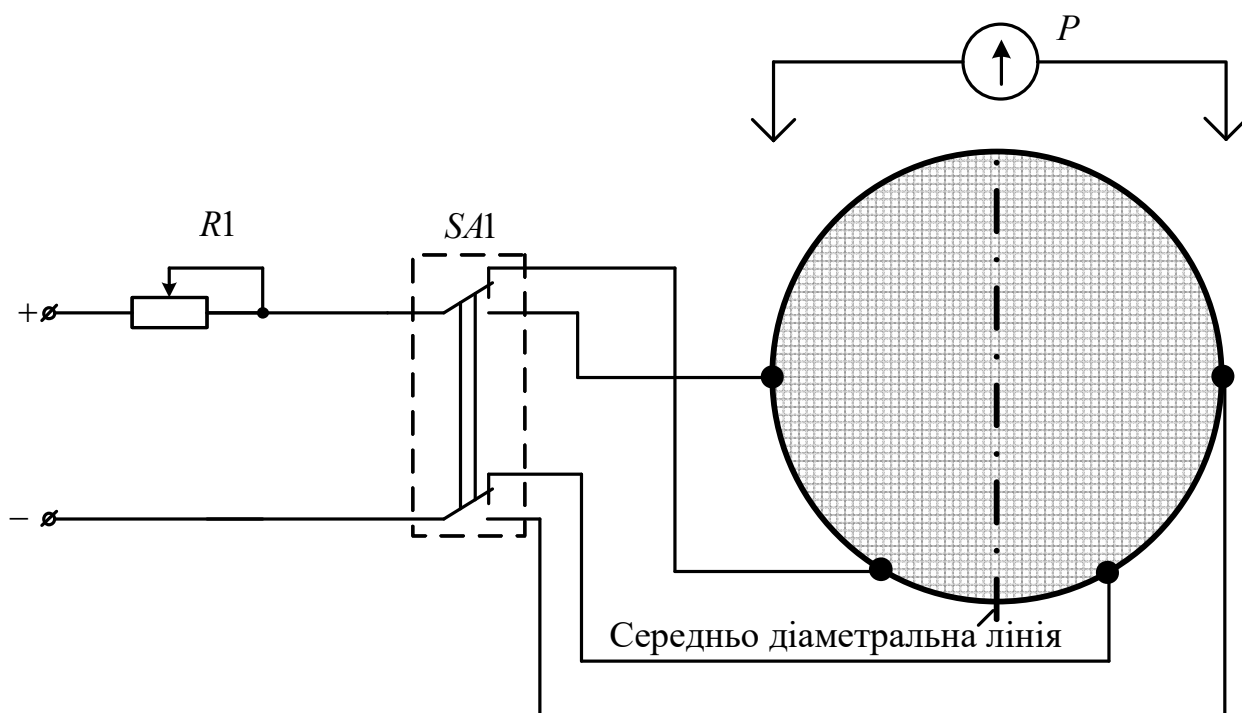


Рисунок 3.8 – Електрична схема лабораторної установки

3. Програма роботи

3.1. Ознайомитись з теоретичними положеннями та лабораторним обладнанням.

3.2. Дослідити стаціонарне поле струму у провідному (однорідному) середовищі на прикладі двопровідної лінії на основі металевого листа.

3.3. Експериментально побудувати лінії однакового потенціалу на шаблонах провідного листа для нижньої пари затискачів відповідно до рис 3.3 або рис. 3.4 у залежності від номера бригади.

3.4. Побудувати теоретичні лінії однакового потенціалу та силові лінії. (приклад зображення ліній картини електростатичного поля представлений на рис. 3.5 та рис. 3.6.).

3.5. Отримані результати порівняти з експериментальними даними.

3.6. Розробити модель у математичному середовищі MatLab або Mathcad.

3.7. Оформити звіт по лабораторній роботі.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ПО ВИКОНАННЮ РОБОТИ

1. Підготовка до виконання роботи

1. Вивчити основні теоретичні відомості відносно моделювання електричного поля двопровідної лінії полем струму у провідниковому листі.

2. Написати аналогічні рівняння, за допомогою яких описуються постійне електричне поле у діелектрику за відсутності об'ємних зарядів та постійне електричне поле у провідному середовищі в областях поза джерелами ЕРС.

3. Записати рівняння, які описують теоретичне лінії однакового потенціалу та лінії напруженості електричного поля.

4. Ознайомитись з прикладами по дослідженню електростатичного поля (задача №1 та задача №2) та побудови картини електростатичного поля (рис. 3.5. та рис. 3.6).

5. Вивчити програму роботи та конструкцію основних вузлів лабораторної установки.

6. Ознайомитись з контрольними питаннями (питання для самостійної роботи) лабораторної роботи.

2. Порядок виконання роботи

1. Скласти електричне коло згідно схеми рис. 3.8.
2. За допомогою гальванометра P знайти лінії однакового потенціалу з різницею потенціалів між двома сусідніми лініями $5 \div 20$ поділок гальванометра та накреслити їх на сталевому листі крейдою.
3. Одну з ліній однакового потенціалу сумістити з середньою діаметральною лінією листа, щоб картина поля була симетричною відносно неї.
4. Перемалювати отримані криві у протокол звіту на шаблони провідного листа з нанесеною масштабною сіткою, зображені на рис. 3.3 та 3.4.

3. Обробка результатів дослідів

1. Виконати розрахунок даних для побудови теоретичної картини поля.
2. На картину поля, нанесену на шаблони, накласти розраховану теоретично картину поля: лінії однакового потенціалу та лінії струму.
3. Зробити та записати у протокол звіту висновки з виконаної роботи.

ЗМІСТ ЗВІТУ

Протокол з лабораторної роботи має містити матеріали, що оформлюються відповідно до правил та вимог ЄСКД та ДСТУ:

- титульний аркуш, прилад якого наведено у додатку А;
- мету та послідовність виконання лабораторної роботи;
- електричні схеми з параметрами елементів, що досліджуються;
- таблиці величин, що вимірюються та розраховуються;

- умови завдання для варіанту бригади;
- формули обчислень, повинні бути представлені у заданому порядку: рівняння у літерних позначеннях, рівняння у числах, відповідь та одиниці виміру;
- графіки, що побудовані за результатами експериментів і розрахунків;
- програми та результати моделювання у математичних середовищах MatLab або Mathcad;
- висновки за даними лабораторної роботи (проаналізувати теоретичну та експериментальну картини електричного поля).

Питання для самостійної роботи

1. Що розуміють під поняттями електромагнітне поле, електростатичне поле,
2. Визначте напруженість електричного поля, потенціал, поле зарядженої осі, лінія однакового потенціалу та лінії струму.
3. У чому полягають умови подібності електростатичного поля та електричного поля постійного струму у провідному середовищі в області поза джерелами ЕРС?
4. Які величини в електростатичному полі постійного струму аналогічні електричному заряду q , векторам напруженості та електричного зміщення електростатичного поля?
5. Які лінії в електростатичному полі постійного струму відповідають лініям: однакового потенціалу; напруженості електростатичного поля?
6. Яка величина в електричному полі постійного струму відповідає потоку вектора напруженості електростатичного поля?

7. Аналогія рівнянь електростатичного поля та електричного поля постійного струму є необхідною, але не достатньою умовою для моделювання цих полів. Які ще умови повинні виконуватися [8]?

8. З якою метою застосовують на практиці моделювання полів?

Приклади задач по дослідженню електростатичного поля

Задача №1

Два нескінченно довгих циліндра колового перетину з паралельними осями розташовані у повітрі (рис. 3.9). Радіуси циліндрів $R_1 = 20$ мм, $R_2 = 40$ мм, відстань між геометричними осями $2 \cdot H = 80$ мм. Напруга між циліндрами дорівнює 100 В.

Необхідно визначити відстань між геометричними та електричними осями; визначити напруженість електричного поля у точці m ; знайти значення поверхневої густини заряду у точці m та k ; визначити ємність на одиницю довжини циліндрів [6].

Рішення

Визначимо відстань між електричними та геометричними осями циліндрів

$$\begin{aligned} H_1 &= H + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \cdot H} = 40 + \frac{20^2 - 40^2}{4 \cdot 40} = 32.5, \text{ мм}; \\ H_2 &= H + \frac{R_2^2 - R_1^2}{4 \cdot H} = 40 + \frac{40^2 - 20^2}{4 \cdot 40} = 47.5, \text{ мм}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

де H_1 та H_2 - відстань між геометричними осями першого та другого циліндрів та лінією однакового потенціалу.

Розрахуємо відстань від лінії однакового потенціалу $\varphi = 0$ до електричних осей циліндрів d

$$d = \sqrt{H_1^2 - R_1^2} = \sqrt{32.5^2 - 20^2} = 25.617, \text{ мм}. \quad (3.21)$$

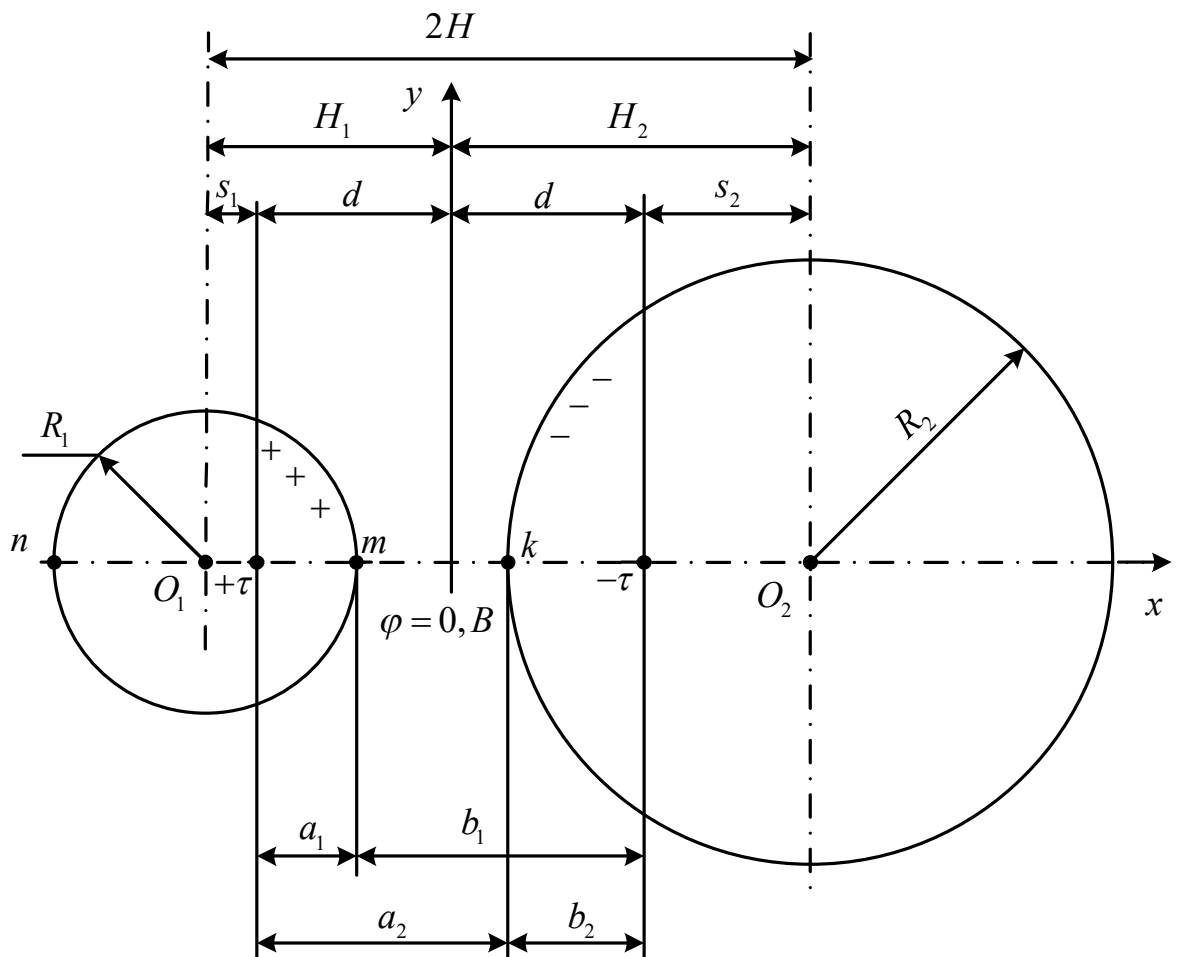


Рисунок 3.9 – Розташування у просторі циліндрів колового перетину з паралельними осями

Відстань між електричною та геометричною віссю першого циліндра s_1 дорівнює

$$s_1 = H_1 - d = 32.5 - 25.617 = 6.883, \text{ мм}, \quad (3.22)$$

а відстань між електричною та геометричною віссю другого циліндра s_2 визначається за формулою

$$s_2 = H_2 - d = 47.5 - 25.617 = 21.883, \text{ мм}. \quad (3.23)$$

Напруга між циліндрами дорівнює

$$U = \varphi_m - \varphi_k = \left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_1}{a_1} + C \right) - \left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_2}{a_2} + C \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2}, B. \quad (3.24)$$

де φ_m та φ_k - потенціали точок, що розташовані на поверхні кожного з циліндрів, В.

Величини відстаней a_1, a_2, b_1 та b_2 , які показані на рис. 3.9 дорівнюють

$$\begin{aligned} a_1 &= R_1 - s_1 = 20 - 6.883 = 13.117, \text{мм}; \\ b_1 &= 2 \cdot d - a_1 = 2 \cdot 25.617 - 13.117 = 38.117, \text{мм}; \\ b_2 &= R_2 - s_2 = 40 - 21.883 = 18.117, \text{мм}; \\ a_2 &= 2 \cdot d - b_2 = 2 \cdot 25.617 - 18.117 = 33.117, \text{мм}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Нехай E_1 - напруженість поля у точці m , що обумовлена зарядом $+\tau$; E_2 - напруженість поля у точці m , що обумовлена зарядом $-\tau$. Модуль напруженості поля у точці m визначається рівнянням

$$\begin{aligned} E_m &= E_1 + E_2 = \left[\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \right] \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) = \left[\frac{U}{\ln \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2}} \right] \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) = \\ &= \left[\frac{100}{\ln \frac{38.117 \cdot 33.117}{13.117 \cdot 18.117}} \right] \left(\frac{1}{13.117} + \frac{1}{38.117} \right) = 6.136, \frac{B}{\text{мм}}; \\ E_m &= 6.136 \cdot 1000 = 6136, \frac{B}{\text{м}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Визначимо модуль напруженості поля у точці k

$$\begin{aligned} E_k &= \left[\frac{U}{\ln \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2}} \right] \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} \right) = \left[\frac{100}{\ln \frac{38.117 \cdot 33.117}{13.117 \cdot 18.117}} \right] \left(\frac{1}{33.117} - \frac{1}{18.117} \right) = \\ &= 1.497, \frac{B}{\text{мм}}; E_k = 1.497 \cdot 1000 = 1497, \frac{B}{\text{м}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Розрахуємо поверхневу густину заряду у точці m

$$\sigma_m = D_m = \varepsilon_0 E_m = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 6136 = 5.433 \cdot 10^{-8}, \frac{\text{К}}{\text{М}^2}. \quad (3.28)$$

Розрахуємо поверхневу густину заряду у точці k

$$\sigma_k = D_k = \varepsilon_0 E_k = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1497 = 1.326 \cdot 10^{-8}, \frac{\text{К}}{\text{М}^2}. \quad (3.29)$$

Ємність між циліндрами на одиницю довжини дорівнює

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2}} = \frac{2\pi 8.854 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{38.117 \cdot 33.117}{13.117 \cdot 18.117}} = 33.31 \cdot 10^{-12}, \frac{\text{Ф}}{\text{М}}. \quad (3.30)$$

Задача №2

Провести лінію однакового потенціалу на плоскому круглому сталевому листі рис. 3.10, потенціал якої дорівнює 20% від прикладеної постійної напруги [7]. Електроди розміщені симетрично відносно середньої діаметральної лінії листа, а їх діаметри ($\varnothing 8$ мм) малі порівняно з відстанню між ними ($2a = 360$ мм), тож електричні осі практично збігаються з геометричними осями електродів $a \approx b$. Напруга між мідними циліндрами (електродами) $U_{12} = 25$ В, сила струму $I = 7$ А.

Рішення

Запишемо рівняння для визначення напруги між точками 1 та 2

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R} + C = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln k + C = 25, \text{В}; \\ \varphi_2 &= -\frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R} + C = 0, \text{В}; \\ U_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 = \left(\frac{I}{2\pi\gamma} \ln k + \text{const} \right) - \left(-\frac{I}{2\pi\gamma} \ln k + \text{const} \right) = \frac{I}{\pi\gamma} \ln k, \text{В}; \\ U_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 = 25 - 0 = 25, \text{В}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

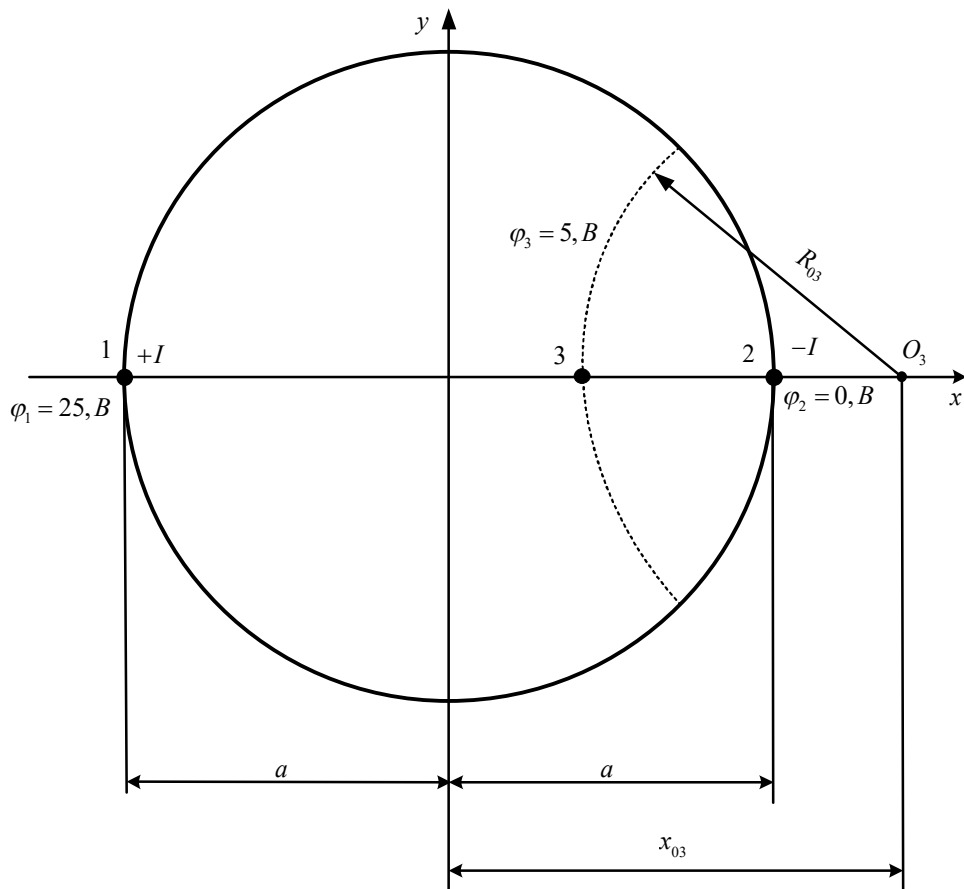


Рисунок 3.10 – Графічне зображення ліній однакового потенціалу

Якщо відома напруга U_{12} , то можна розрахувати величину

$$\frac{I}{2\pi\gamma} = \frac{U_{12}}{2 \ln \frac{x_0 + a}{R}}. \quad (3.32)$$

Сталу C визначають з умови, що потенціал точки 2 дорівнює нулю

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R} + C; \\ C &= \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R}, B. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Рівняння лінії однакового потенціалу запишемо у наступному вигляді

$$\varphi_3 = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln k + C = -0.2U_{12}, B;$$

$$\begin{aligned} \frac{I}{2\pi\gamma} \ln k + \frac{I}{2\pi\gamma} \ln k &= -0.2U_{12}, B; \quad \frac{I}{\pi\gamma} \ln k = -0.2U_{12}, B; \\ a_1 = b_2 = r_e &= 0.004, \text{ м}; \quad a_2 = b_1 = 2a - r_e = 2 \cdot 0.18 - 0.004 = 0.356, \text{ м}; \quad (3.34) \\ v = \frac{I}{\pi\gamma} &= \frac{U_{12}}{\ln \left[\frac{b_1 \cdot a_2}{a_1 \cdot b_2} \right]} = \frac{25}{\ln \left[\frac{0.356 \cdot 0.356}{0.004 \cdot 0.004} \right]} = 2.785; \\ \ln k &= \frac{-0.2U_{12}}{v}; \quad e^{\ln k} = e^{\frac{-0.2U_{12}}{v}}; \quad k = e^{\frac{-0.2 \cdot 25}{2.785}} = 0.166. \end{aligned}$$

Підставляючи значення k у рівняння (3.8) знаходимо значення радіуса лінії однакового потенціалу R_{03} (від'ємний знак для точок, що розташовані праворуч від початку координат) та координату її центру x_{03}

$$\begin{aligned} k^2 &= 1 + 2 \frac{a^2}{R^2} \pm 2 \frac{a}{R} \sqrt{1 + \frac{a^2}{R^2}} \Rightarrow 0.166^2 = 1 + 2 \frac{0.18^2}{R_{03}^2} - 2 \frac{0.18}{R_{03}} \sqrt{1 + \frac{0.18^2}{R_{03}^2}}; \\ R_{03} &= 0.061, \text{ мм}; \quad (3.35) \\ x_{03} &= \sqrt{a^2 + R_{03}^2} = \sqrt{0.18^2 + 0.061^2} = 0.19, \text{ мм}. \end{aligned}$$

У основі аналізу усіх задач лежать рівняння Максвела, які можна використовувати в інтегральній формі для рішення простих практичних задач, а у диференціальній формі – для рішення задач проектування. Під час дослідження електромагнітного поля часто використовують його графічне представлення за допомогою силових ліній. Це дає можливість не тільки наглядно представляти розподіл поля, но і наближено визначати його характеристики.

Приклад **Mathcad програми** та електростатична картина поля для двох лінійних зарядів різного знаку, що розташовані на деякій відстані, представлено на рис. 3.11.


```


$$N_1 := 251$$


$$i := 0..N_1$$


$$j := i$$


$$Ro := 0.18$$


$$x_i := Ro - \frac{2 \cdot Ro \cdot i}{N_1} \quad y_i := Ro - \frac{2 \cdot Ro \cdot i}{N_1}$$


$$z(x, y) := x + y \cdot i \quad x1 = 0.09 \quad y1 := 0.155$$


$$w(x, y) := \ln\left(\frac{z(x + x1, y - y1)}{z(x - x1, y - y1)}\right)$$


$$W1(x, y) := w(x_i, y_j)$$


$$u1(x, y) := \operatorname{Re}(w(x, y))$$


$$v1(x, y) := \operatorname{Im}(w(x, y))$$


$$U1_{i,j} := \begin{cases} u1(x_i, y_j) & \text{if } |z(x_i, y_j)| \leq Ro \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad V1_{i,j} := \begin{cases} v1(x_i, y_j) & \text{if } |z(x_i, y_j)| \leq Ro \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$


```

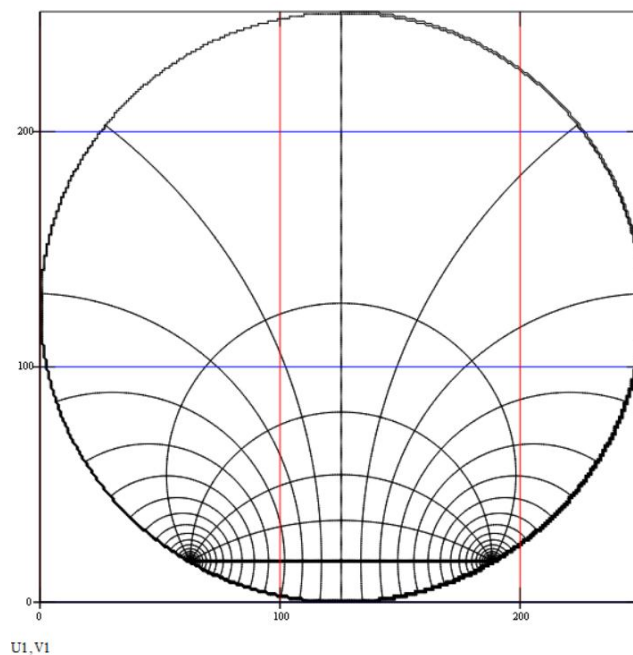


Рисунок 3.11 – Електростатична картина поля двох лінійних зарядів
різного знаку Mathcad

Комплексний потенціал двох зарядів визначається, як суперпозиція
полів зарядів що створюють кожен заряд окремо

$$W(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z(x + x_0, y)}{z(x - x_0, y)} \right] \quad (3.36)$$

де $U(x, y) = \operatorname{Re} W(x, y)$ - потенціальна функція;

$V(x, y) = \operatorname{Im} W(x, y)$ - функція струму;

x_0 - координата заряду уздовж осі x .

Значення множника $\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} = 1$.

Приклад **Matlab** програми та електростатична картина поля для двох лінійних зарядів різного знаку представлено на рис 3.12.

```
R0=0.18;
N=251;
k=0:1:N;
j=0:1:N;
x=R0-(2*k*R0/N);
y=R0-(2*j*R0/N);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+1i*Y;

x1=0.09;
y1=0.155;

W1=(log((X-x1)+1i*(Y-y1))-log((X+x1)+1i*(Y-y1)));

W=zeros(N+1,N+1);
for i= 1:1:N+1
for j=1:1:N+1
    if abs(Z(i,j))<=R0
        W(i,j)=W1(i,j);
    else
        W(i,j)=0;
    end
end
end
end

U=real(W);
V=imag(W);

figure
[C,h]=contour(X,-Y,U,21,'black');
axis equal
```

```

%text_handle = clabel(C,h);
hold;
grid;
contour(X,-Y,V,11,'black');

```

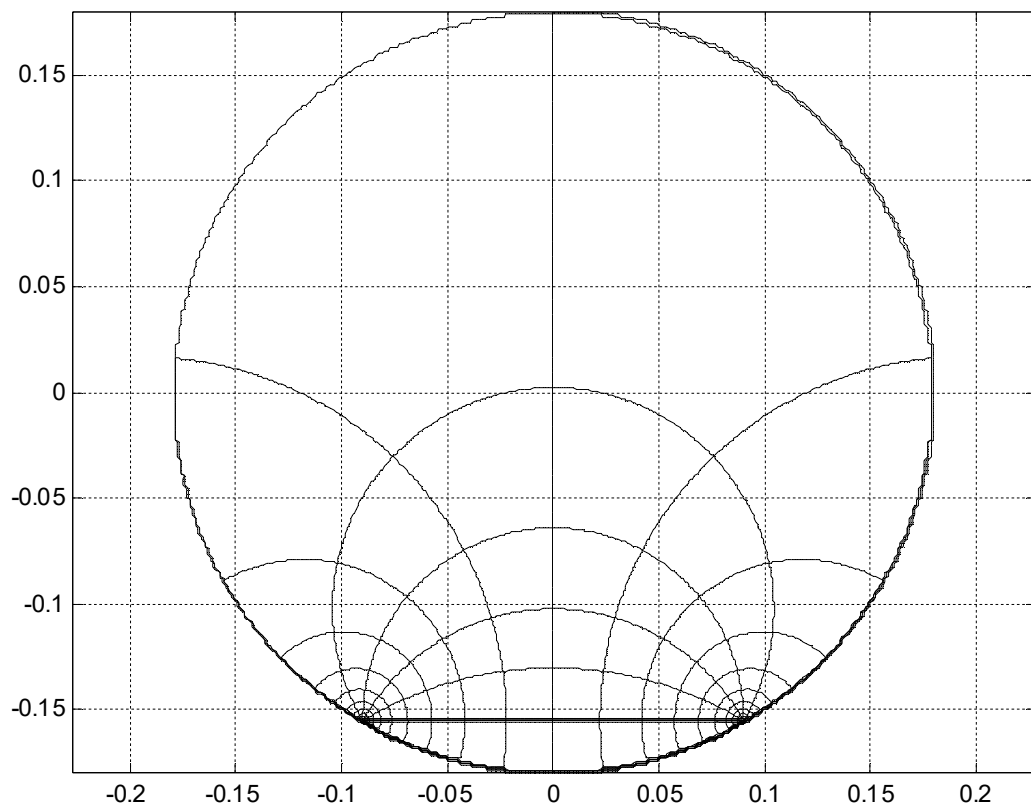


Рисунок 3.11 – Електростатична картина поля для двох лінійних зарядів різного знаку Matlab

Бібліографічний список використаної літератури

1. Курило И.А. Методические указания к лабораторным работам по теоретическим основам электротехники для студентов электроэнергетического и электротехнического профиля / И.А. Курило, А.А. Баран, А.С. Собчук // Цикл VI. – Киев: КПИ, 1985. – 48 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле /Л.А. Бессонов // Учебник для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 263 с.
3. Слободян Л.Р. Электромагнітні поля електротехнічних установок / Л.Р. Слободян, В.І. Шеховцов // Навч. посібник. – К.: Либідь, 1994. – 176 с.
4. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: «Энергия», 1968. – с. 488.
5. Миролубов Н.Н. Методы расчетов электрических полей / Н.Н. Миролубов, М.В. Костенко, М.Л. Левинштейн, Н.Н. Тиходеев //. – М.: «Высшая школа», 1963. – 400 с.
6. Бессонов Л.А. Задачник по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди, А.К. Першин, В.П. Каменская, С.Э. Расовкая, В.И. Галтеева//. – М.: Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, 1970. – с. 708.
7. Гусейнова Т.И. Экспериментальные методы моделирования электромагнитных полей / Т.И. Гусейнова, Т.М. Крайнова, В.С. Лукманов, Е.В. Парфенов, И.Е. Чечулина // Лабораторные работы практикум по дисциплине «Теория электромагнитного поля». – Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа, 2006. – 90 с.
8. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля: лаб. Практикум / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчян, В.М. Юринов, В.Н. Боронин. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 221 с.

Лабораторна робота № 4
МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОГО
ТА ПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРІВ НА ЕОМ

Мета роботи: дослідити електричне поле за допомогою моделювання на ЕОМ в середовищі математичного процесора Mathcad та ознайомитись з методикою побудови еквіпотенціальних та силових ліній електростатичного поля з використанням рішення рівняння Лапласа та комплексного (аналітичного) потенціалу електростатичного поля.

Застосувати побудовану картину поля для визначення його основних характеристик (потенціалу, вектора напруженості електричного поля, наведеного заряду і т.п.) в заданих точках.

Тривалість роботи: 4 години.

1. Основні теоретичні відомості

Графічно електростатичне поле зображують у вигляді силових та еквіпотенціальних ліній.

Силова лінія (лінія вектора напруженості електростатичного поля \vec{E}) – це уявна лінія, дотична до якої у будь-якій її точці збігається з напрямком вектора напруженості поля в цій точці. Силкові лінії починаються на позитивно зарядженому тілі і закінчується на негативно зарядженому тілі.

Еквіпотенціальні лінії – це лінії однакового потенціалу, для яких $U = const$. Різниця потенціалів між сусідніми еквіпотенціальними лініями є сталою величиною. Там, де напруженість поля більша, сусідні лінії розміщені ближче одна до одної. Різниця потенціалів поділена на відстань між еквіпотенціальними лініями, дорівнює середній потужності поля уздовж шляху l

$$E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}. \quad (4.1)$$

З цього випливає, що силові лінії поля та еквіпотенціальні лінії завжди перетинаються під прямим кутом. Еквіпотенціальні лінії замкнені самі на себе. Силові лінії підходять до поверхні електродів перпендикулярно, а криволінійні прямокутники, що утворюються від перетину силових і еквіпотенціальних ліній, є подібними.

Отже картина поля має вигляд сітки з окремих комірок [1].

Комплексний потенціал

Лінії однакового потенціалу будемо задавати функцією $U(x, y)$, а силові лінії функцією $V(x, y)$. Координати (x, y) на декартівській площині зручно задавати комплексною координатою $z(x, y) = x + jy$. Обидві функції $U(x, y)$ та $V(x, y)$ теж зробимо складовими комплексного потенціалу.

$$W(x, y) = U(x, y) + jV(x, y), \text{ або } W(z) = U(z) + jV(z). \quad (4.2)$$

Дійсна та уявна частини комплексного потенціалу зв'язані співвідношенням Коші-Рімана [2]:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Такий зв'язок між функцією потенціалу $U(x, y)$ та функцією потоку $V(x, y)$ дозволяє при наявності однієї функції, наприклад, потенціалу $U(x, y)$ знаходити іншу – функцію потоку $V(x, y)$.

Приклад. Нехай потрібно сконструювати функцію $W(z) = U(z) + jV(z)$, при відомій її дійсній частині $U(x, y)$. Для цього звернемось до системи Коші-Рімана. З першого рівняння отримаємо

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \rightarrow V(x,y) = \int \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} dy + f(x) \quad (4.4)$$

Для визначення невідомої функції $f(x)$ використаємо друге рівняння Коші-Рімана

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} &= -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = -\int \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} dy - \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \\ \rightarrow f(x) &= -\int \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} dx + \int dx \int \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} dy + C \end{aligned} \quad (4.5)$$

Поле діелектричного та провідного циліндрів в однорідному зовнішньому електричному полі (метод розділення змінних)

Маємо нескінченний циліндр з радіусом R_0 , розташований так (рис. 4.1), що його вісь співпадає з віссю z . Оскільки поле у цьому випадку плоско-паралельне, то будемо використовувати тільки дві координати циліндричної системи координат [3].

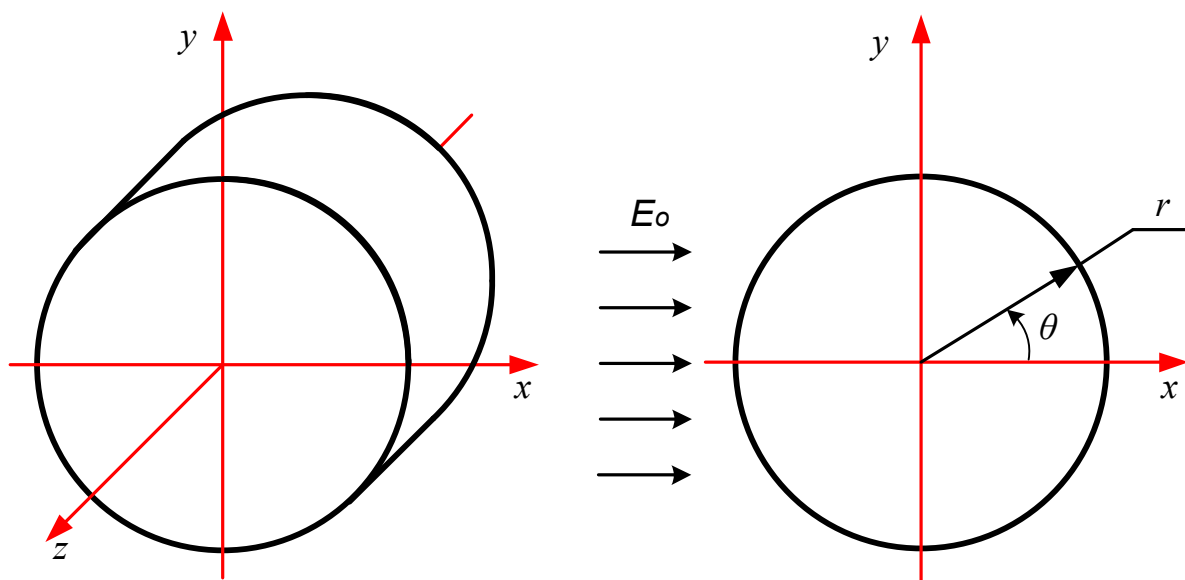


Рисунок 4.1 – Розташування циліндра у заданій системі координат

Розподіл потенціалу визначається рішенням рівняння Лапласа, яке в циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial \theta^2} = 0 \quad (4.6)$$

Розв'язуючи вказане рівняння слід враховувати наступні граничні умови:

на осі циліндра при $r = 0, \varphi = 0$;

при $r = \infty, E = E_0$ або $\varphi = -E_0 \cdot r \cos(\Theta)$;

на межі розділу двох середовищ:

$$E_{1\theta} = E_{2\theta} \text{ або } \varphi_1 = \varphi_2; D_{1r} = D_{2r} \text{ або } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}.$$

де індекс **1** відповідає внутрішньому середовищу, а індекс **2** - зовнішньому.

Крім того з умови симетрії поля відносно осі x випливає: $\varphi(\Theta) = \varphi(-\Theta)$.

Рішення рівняння Лапласа [4] для внутрішнього та зовнішнього середовищ, за вказаних граничних умов:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot r \cdot \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -E_0 \cdot r \cdot \cos \theta + E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^2}{r} \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Враховуючи, що $r \cdot \cos \theta = x$, отримуємо, що напруженість електричного поля всередині циліндра має тільки горизонтальну складову і постійна, тобто $E_1 = \text{const}$ при $r \leq R_0$.

$$E_1 = E_{1x} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = E_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (4.8)$$

У зовнішньому полі знаходимо $\vec{E}_2 = -\text{grad} \varphi_2$ за двома складовими E_{1r} та $E_{2\theta}$

$$\begin{aligned} E_{2r} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^2}{r^2} \right) \cos \theta, \\ E_{2\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = E_0 \left(-1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^2}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отриманий результат пояснює, чому всередині стороннього включення, яке має меншу діелектричну проникність, напруженість поля може помітно зростати. Це може привести до розвитку пробою та руйнуванню ізоляції через електричний розряд, який виникає всередині включення.

Таке спотворення поля пояснюється виникненням зв'язаних зарядів на поверхні циліндра. Густина зв'язаних зарядів визначається різницею радіальних складових векторів поляризації

$$\sigma_{zv} = \vec{P}_{1r} - \vec{P}_{2r} \quad (4.10)$$

де $P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E$, $\varepsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$.

2. Опис лабораторної установки

Лабораторна робота виконується на комп'ютері з встановленим математичним процесором MathCad. Програмне забезпечення до цієї лабораторної роботи знаходиться у файлі *lab-71.xmcd*.

2.1 Побудова картини електростатичного поля циліндра у програмі Mathcad

Визначимо складові комплексного потенціалу для обох областей

$$\begin{aligned} U_1(r, \theta) = \varphi_1(r, \theta) &= -E_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot r \cdot \cos \theta, \\ U_2(r, \theta) = \varphi_2(r, \theta) &= -E_0 \cdot r \cdot \cos \theta + E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^2}{r} \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Уявні частини комплексного потенціалу знайдемо за системою рівнянь Коші-Рімана, і вони мають вигляд

$$\begin{aligned} V_1(r, \theta) &= -E_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot r \cdot \sin \theta, \\ V_2(r, \theta) &= -\left(r + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^2}{r} \right) \cdot E_0 \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Тоді комплексний потенціал W у першій та другій областях буде

$$\begin{aligned} W_1(r, \theta) &= U_1(r, \theta) + j \cdot V_1(r, \theta) = \\ &= -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \cdot r \cdot e^{j\theta} = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \cdot z; \\ W_2(r, \theta) &= U_2(r, \theta) + j \cdot V_2(r, \theta) = \\ &= -\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{R_0^2}{r} \cdot e^{-j\theta} + r e^{j\theta} \right) E_0 = -\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{R_0^2}{z} + z \right) E_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

де $z = x + jy$ – комплексна координата.

3. Програма роботи

3.1 Ознайомитись з основними теоретичними відомостями моделювання електричного поля діелектричного та провідного циліндрів на ЕОМ за допомогою математичного процесора Mathcad.

3.2 Побудувати картину електростатичного поля циліндра у програмі Mathcad відповідно номеру варіанту (табл. 4.1), який задає викладач, що провидить лабораторну роботу.

3.3 Дослідити картину електростатичного поля циліндра за результатами моделювання (пункт 4.3). Приклад представлено як у кінці роботи.

3.4 Оформити звіт по лабораторній роботі.

Таблиця 4.1 – Варіанти даних для математичної моделі

№	$R_0, \text{мм}$	$E_0, \text{В / мм}$	$L, \text{мм}$	ε_2
1	1	50	$5 R_0$	6
2	1.1	55	$4 R_0$	4
3	1.2	60	$3 R_0$	5
4	1.3	65	$6 R_0$	6
5	1.4	70	$5 R_0$	7
6	1.5	75	$4 R_0$	8
7	1.6	80	$5 R_0$	9
8	1.7	85	$4 R_0$	8
9	1.8	90	$3 R_0$	7
10	1.9	95	$4 R_0$	6
11	2	100	$5 R_0$	5
12	2.1	105	$6 R_0$	3
13	2.2	110	$5 R_0$	4
14	2.3	115	$4 R_0$	5
15	2.4	120	$3 R_0$	8
16	2.5	125	$6 R_0$	7
17	2.6	130	$3 R_0$	4
18	2.7	135	$5 R_0$	6
19	2.8	140	$4 R_0$	5
20	2.9	145	$3 R_0$	4

4. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ПО ВИКОНАННЮ РОБОТИ

4. 1. Підготовка до виконання роботи

4.1.1. Вивчити методики побудови картини поля циліндра, що розміщений в однорідному зовнішньому електричному полі з напруженістю E_0 .

4.1.2. Ознайомитись використанням з рішення рівняння Лапласа у циліндричній системі координат та застосуванням комплексного (аналітичного) потенціалу електростатичного поля для побудови картини цього поля.

4.1.3. Ознайомитись з принципами моделювання електричного поля за допомогою математичної програми Mathcad.

4.1.4. Вивчити програму лабораторної роботи.

4.1.5. Ознайомитися з контрольними питаннями.

4. 2. Порядок виконання роботи

4.2.1. Відповідно до табл. 4.1 присвоїти за вказівкою викладача числові значення радіусу циліндра R_0 , напруженості зовнішнього електричного поля E_0 та діелектричним проникностям: ε_1 – діелектричного циліндра та ε_2 – зовнішнього середовища.

4.2.2. Задати геометричний розмір робочого простору, в якому буде виконуватись моделювання електричного поля та комірок сітки на яку розбивається весь робочий простір. Для спрощення робочий простір представляє собою квадрат із стороною L , розділений на прямокутні комірки. Кількість комірок задається змінною N та дорівнює N^2 .

4.2.3. Перевірити, щоб рівняння за якими проводиться моделювання відповідали рішенням рівняння Лапласа в циліндричній системі координат.

4.2.4. Виконати моделювання для чотирьох випадків:

a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ – однорідне середовище з діелектричною проникністю ε_2 ;

b) $\varepsilon_1 = 1 < \varepsilon_2$ – повітряне циліндричне включення;

с) $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ – провідний циліндр в однорідному полі.

д) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ – діелектричне циліндричне включення.

Величини ε_1 та ε_2 задає викладач.

4.2.5. Визначити розподіл потенціалу та напруженості електричного поля всередині та зовні циліндра для кожного з випадків, що вказані у пункті 4.2.4.

4.2.6. Зберегти результати моделювання для з випадків у **.doc** - файлі.

4.3. Обробка результатів дослідів

4.3.1. Визначити масштаб для ліній однакового потенціалу за дослідом 4.2.4 а).

4.3.2. Розрахувати за картиною поля потенціал φ та напруженість електричного поля E у точках, заданих викладачем, а також напругу між точками.

4.3.3. Через вказані точки всередині циліндра, провести лінії однакового потенціалу та силові лінії продовжуючи їх зовні циліндра;

4.3.4. Розрахувати величину наведеного заряду на поверхні циліндра;

4.3.5. Зробити висновок про спотворення однорідного електричного поля зовні циліндра у дослідях 4.2.4.

ЗМІСТ ЗВІТУ

Протокол з лабораторної роботи має містити матеріали, що оформлюються відповідно до правил та вимог ЄСКД та ДСТУ:

- титульний аркуш, прилад якого наведено у додатку А;
- мету та послідовність виконання лабораторної роботи;
- електричні схеми з параметрами елементів, що досліджуються;

- таблиці величин, що вимірюються та розраховуються;
- умови завдання для варіанту бригади;
- формули обчислень, повинні бути представлені у заданому порядку: рівняння у літерних позначеннях, рівняння у числах, відповідь та одиниці виміру;
- діаграми та графіки, що побудовані за результатами експериментів і розрахунків;
- програми та результати моделювання у математичному середовищі Mathcad;
- висновки за даними лабораторної роботи (проаналізувати картину поля циліндра, який розміщений у зовнішньому електричному полі).

Питання для самостійної роботи

1. Які величини характеризують електростатичне поле і який зв'язок між ними?
2. За якими правилами будується картина електростатичного поля?
3. Як виконується розв'язок рівняння Лапласа і як виглядає рішення цього рівняння для поля діелектричного циліндра, розміщеного в однорідному зовнішньому полі?
4. З якою метою на практиці використовують картину поля?

Приклад **Mathcad** – програми, що реалізує описаний алгоритм розрахунку характеристик електричного поля у діелектрику при появі в його структурі циліндричного включення.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ТА ПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРІВ НА ЕОМ В СЕРЕДОВИЩІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОЦЕССОРА MATHCAD

Задаємо параметри математичної моделі:

$R := 1.2$	- Радіус циліндра в міліметрах;
$E_0 := 60$	- Напруженість однорідного зовнішнього електричного поля, В/мм;
$L := 3R = 3.6$	- Довжина сторони квадратного простору, на якому проводиться моделювання електричного поля в міліметрах;
$\epsilon_1 := 1$ $\epsilon_2 := 5$	- Відносні діелектричні провідності циліндра та зовнішнього середовища;
$N := 151$	- Кількість комірок на кожній стороні квадратного простору
$i := 0..N$ $j := 0..N$	- індекси комірок по осях X та Y
$x_i := \frac{-L}{2} + \frac{L}{N} \cdot i$ $y_j := \frac{-L}{2} + \frac{L}{N} \cdot j$	- координати комірок по осях X та Y, мм
$z(x, y) := x + j \cdot y$	- комплексна координата
$Ro_{i,j} := \text{if}(z(x_i, y_j) \leq R, 1, 0)$	- Рівняння кола, яке має радіус циліндра

Наводимо вирази опису комплексних потенціалів та їх складових для електростатичного поля всередині та зовні циліндра.

$$\begin{aligned}
 W1(x, y, \epsilon_1, \epsilon_2) &:= \frac{-2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot E_0 \cdot z(x, y) & (r < R) & \text{- комплексні потенціали всередині та зовні циліндра} \\
 W2(x, y, \epsilon_1, \epsilon_2) &:= \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{R^2}{z(x, y)} - z(x, y) \right) \cdot E_0 & (r > R) & \\
 W_{i,j} &:= \text{if}(|z(x_i, y_j)| \leq R, W1(x_i, y_j, \epsilon_1, \epsilon_2), W2(x_i, y_j, \epsilon_1, \epsilon_2)) & & \text{- комплексний потенціал на всій площині моделі} \\
 U_{i,j} &:= \text{Re}(W_{i,j}) & & \text{- Потенціальна функція електричного поля} \\
 V_{i,j} &:= \text{Im}(W_{i,j}) & & \text{- Потоківна функція електричного поля} \\
 \text{Картину поля будемо на квадратній площині, розміром } N \times N (151 \times 151) \text{ комірок.} \\
 \text{Кожна комірка це квадрат із стороною: } dx := \frac{L}{N} = 0.024 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

Розрахуємо напруженість електричного поля у всіх комірках досліджуваного простору за спрощеною формулою для похідної

$$E_{i,j} := \begin{cases} \frac{U_{i,j} - U_{i+1,j}}{dx} & \text{if } i \leq N-1 \\ \frac{U_{N-1,j} - U_{N,j}}{dx} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Виконаємо дослід, в якому діелектрична проникність циліндричного включення менше ніж проникність середовища (повітряне включення в ізоляції електричного конденсатора). На рис. 4.2 представлена для цього досліджу графічна картина електростатичного поля з діелектричним циліндром.

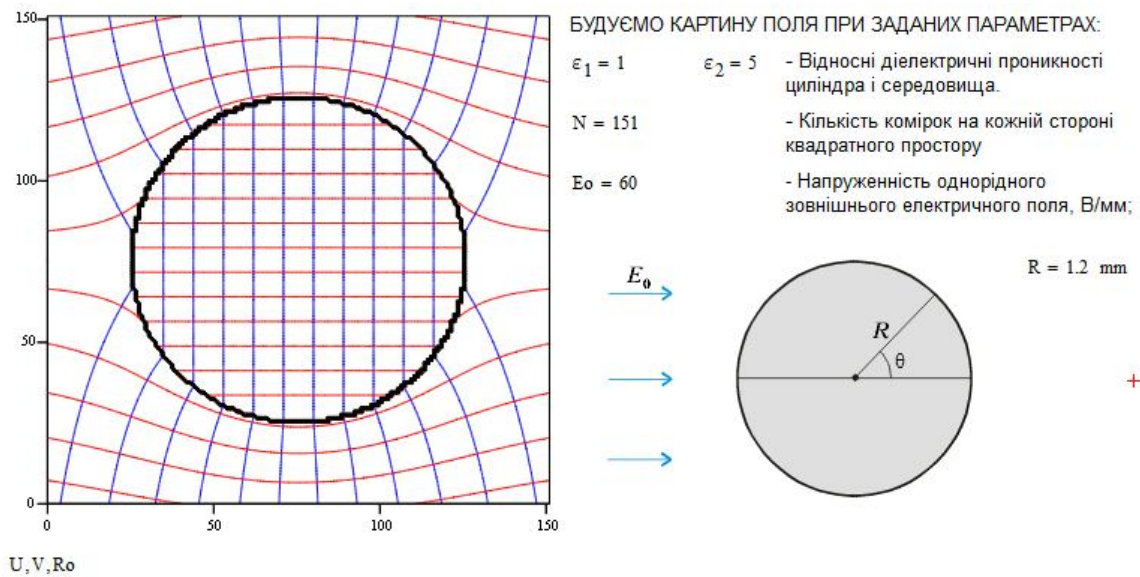


Рисунок 4.2 – Графічна картина електростатичного поля з діелектричним циліндром

На рис. 4.3 та рис. 4.4 показано розподіл потенціалу та напруженості електричного поля вздовж осі x при вказаній координаті y .

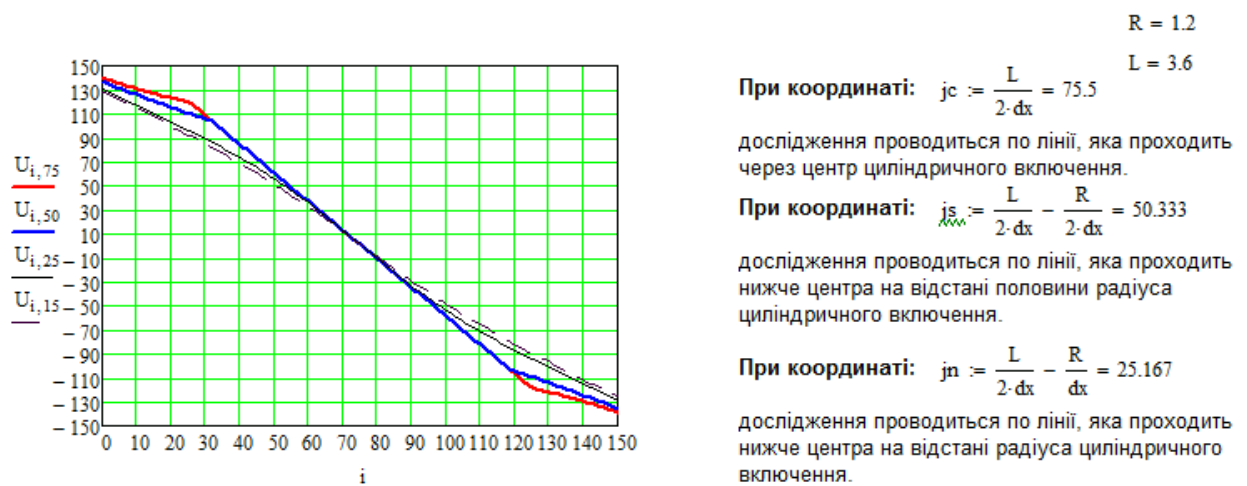
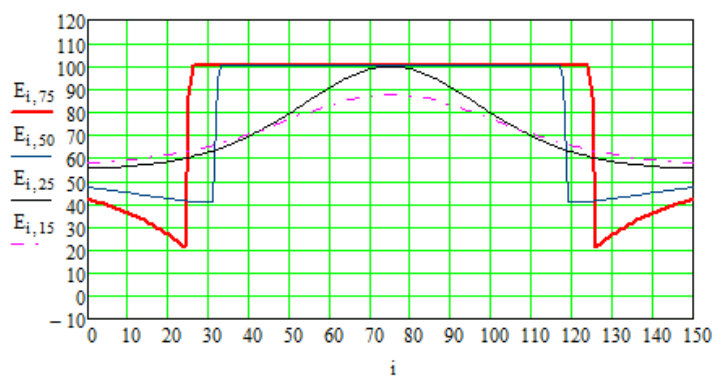


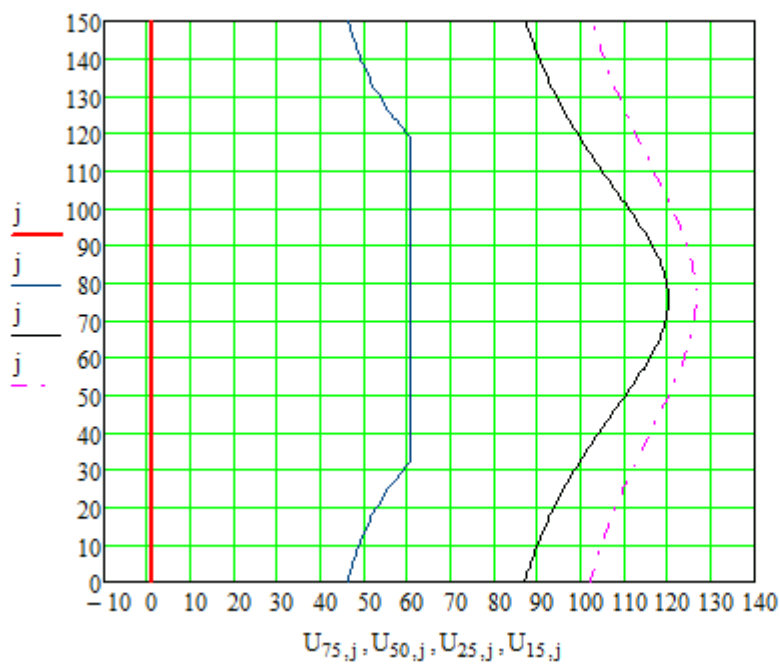
Рисунок 4.3 – Розподіл потенціалу U вздовж осі x при вказаній координаті y



$$\begin{aligned} E_0 &= 60 & R &= 1.2 & \frac{R}{dx} &= 50.333 \\ L &= 3.6 & \frac{L}{dx} &= 151 \\ \epsilon_1 &= 1 & \epsilon_2 &= 5 \end{aligned}$$

Рисунок 4.4 – Розподіл напруженості електричного поля E вздовж осі x при вказаній координаті y

На рис. 4.5 та рис. 4.6 представлено для повного дослідження картини електростатичного поля розподіл потенціалу та напруженості електричного поля вздовж осі y при вказаній координаті x .



$$\epsilon_1 = 1 \quad \epsilon_2 = 5$$

+

Рисунок 4.5 – Розподіл потенціалу U вздовж осі y при вказаній координаті x

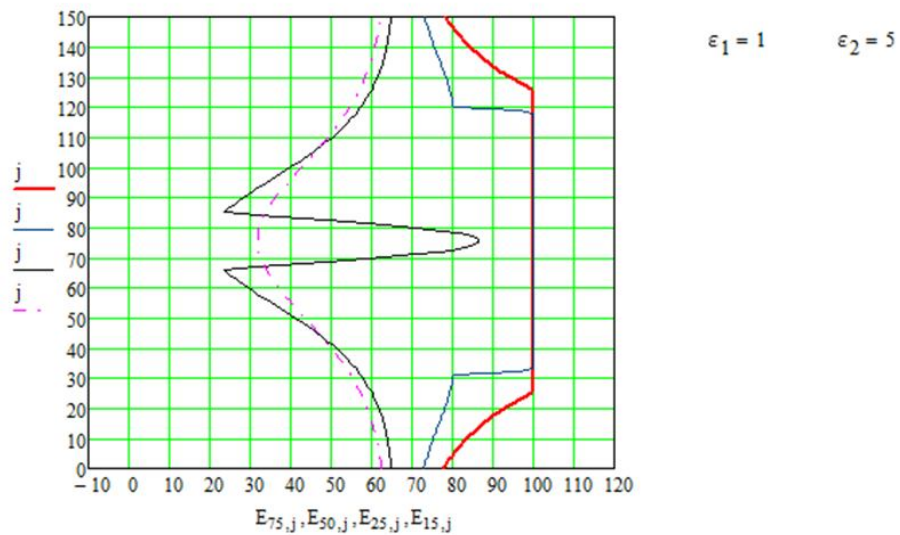


Рисунок 4.6 – Розподіл напруженості електричного поля E вздовж осі y при вказаній координаті x

Проаналізуємо отримані результати моделювання у середовищі математичного процесора Mathcad за пунктом 4.2.4 з порядку виконання роботи:

а) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5$ – однорідне середовище (рис. 4.7)

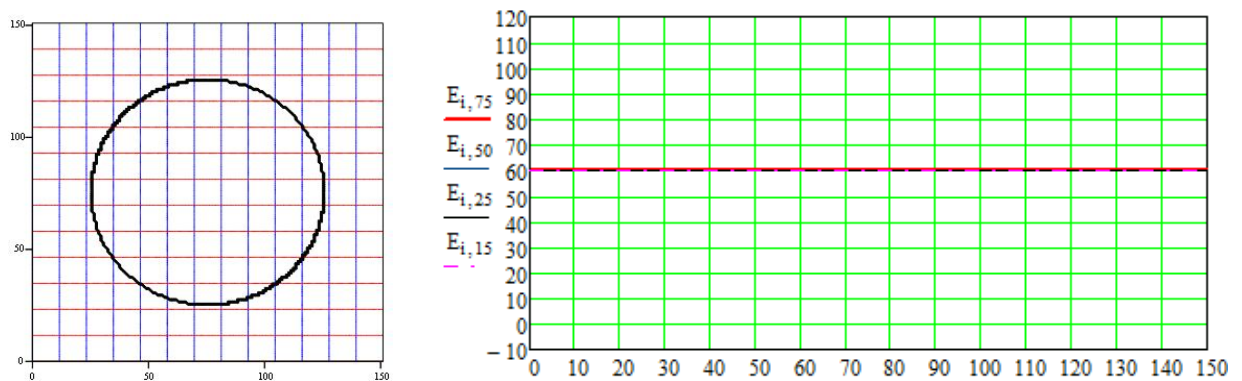


Рисунок 4.7 – Картина електростатичного поля при однорідному середовищі

Висновок: Електричне поле не спотворюється;

б) $\epsilon_1 = 1 < \epsilon_2 = 5$ – повітряне циліндричне включення (рис. 4.8)

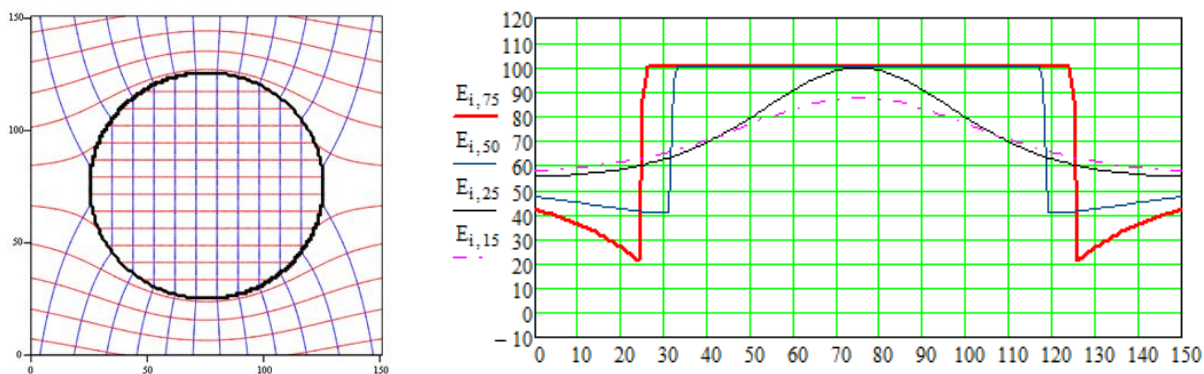


Рисунок 4.8 – Картина електростатичного поля при циліндричному повітряному включенні

Висновок: Даний дослід показує, що електричне поле у повітряному ($\epsilon_1=1$) включенні однорідне та набагато більше ніж в основному ($\epsilon_2=5$) діелектрику ($100 \gg 60$). Таким чином, можливе виникнення коронного розряду у цьому включенні, який призведе до руйнування основного діелектрика і погіршення його ізоляційних властивостей;

с) $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ – провідний циліндр в однорідному полі (рис. 4.9)

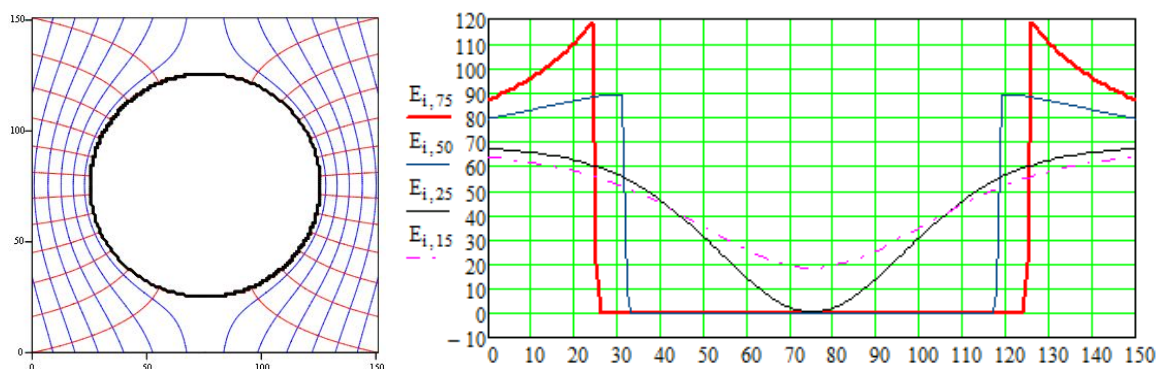


Рисунок 4.9 – Картина електростатичного поля при провідному циліндричному включенні в однорідному середовищі

Висновок: При металевому включенні у діелектрик, поле всередині провідника відсутнє, але зовні, на поверхні провідного включення воно значно зростає (при заданих параметрах майже вдвічі). Це пояснюється тим,

що на протилежних поверхнях провідного циліндра скупчуються заряди різного знаку і цей провідник перетворюється у диполь, поле якого накладається на однорідне зовнішнє поле і спотворює його. Описане явище пояснює, чому під час грози блискавка влучає у дроти ліній електропередачі;

d) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ – діелектричне циліндричне включення (рис. 4. 10)

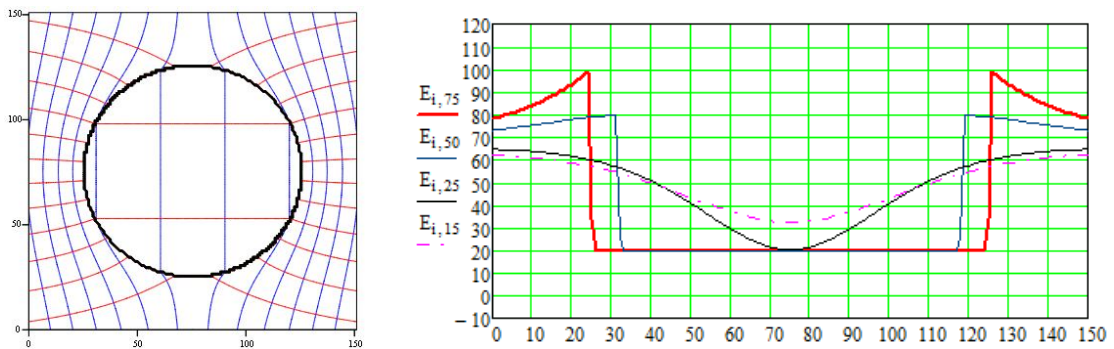


Рисунок 4.10 – Картина електростатичного поля при циліндричному включенні $\varepsilon_1 = 5$; $\varepsilon_2 = 1$

Висновок: Дослідження показало, що у середині циліндричного включення при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, поле зменшується, але на зовнішніх границях включення напруженість поля зростає, що також може призвести до електричного пробоя ізоляції.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Слободян Л.Р. Електромагнітні поля електротехнічних установок / Л.Р. Слободян, В.І. Шеховцов // Навч. посібник. – К.: Либідь, 1994. – 176 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.- 608 с.
3. Гусейнова Т.И. Методические указания к лабораторно – практичным работам по курсу «Теория электромагнитного поля» с применением ЭВМ /

Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; Сост.: Т.И Гусейнова, Т.М. Крайнова, Е.В. Парфенов, – Уфа , 2003. – 68 с.

4. Ионкин П.А. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехнике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. проф. П.А. Ионкин, Г.П. Андреев, С.Н Андреев и др. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

Лабораторна робота № 5
МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ
ТА ПРОВІДНОЇ КУЛІ НА ЕОМ

Мета роботи: дослідити електричне поле за допомогою моделювання на ЕОМ у середовищі математичного процесора Mathcad та ознайомитись з методикою побудови еквіпотенціальних та силових ліній електростатичного поля при внесенні в нього діелектричної або провідної кулі.

Ознайомитись з використанням рішення рівняння Лапласа у сферичній системі координат та застосувати комплексний (аналітичний) потенціал електростатичного поля для побудови картини цього поля.

Використати побудовану картину поля для визначення його основних характеристик (потенціалу, вектора напруженості електричного поля, наведеного заряду і т.п.) в заданих точках.

Тривалість роботи: 4 години.

1. Основні теоретичні відомості

Поле діелектричної та провідної кулі в однорідному зовнішньому електричному полі (метод розділення змінних)

Маємо кулю з радіусом R_0 . Центр кулі поєднано з центром сферичної системи координат рис. 5.1. Напрямок зовнішнього однорідного електричного поля \vec{E}_0 співпадає з напрямом осі z . У таких випадках, поле залежить тільки від координати r та широтного кута θ та не залежить від меридіанного кута α . Це означає, що у будь-якій меридіанній площині поле однакове ($\alpha = const$). Таке поле звуть *плоскомеридіанним*.

Індекс **1** відповідає внутрішньому середовищу, а індекс **2** – зовнішньому. Відповідно, діелектрична провідність кулі позначається як ϵ_1 , а діелектрична провідність зовнішнього середовища – ϵ_2 [1].

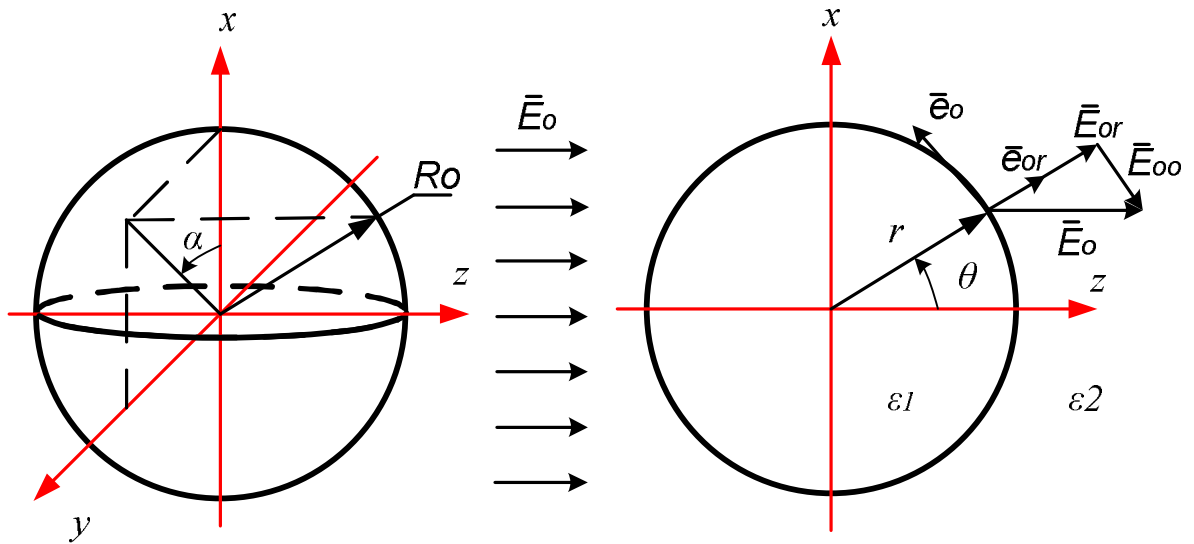


Рисунок 5.1 – Сферична система координат

Розподіл потенціалу визначається рішенням рівняння Лапласа, яке в сферичній системі координат має вигляд [2]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5.1)$$

З умови симетрії поля відносно осі z випливає, що $\varphi(\theta) = \varphi(-\theta)$. Використовуючи метод розділення змінних, легко побачити, що потенціал є періодичною функцією θ та може бути представленим рядом Фур'є, який має тільки парні функції. Вирази потенціалу для внутрішньої та зовнішньої областей за відомими рівняннями Лапласа у сферичній системі координат є наступними [3]:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 r \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \cos \theta + K_1, \\ \varphi_2 &= C_3 r \cos \theta + \frac{C_4}{r^2} \cos \theta + K_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

де C_1 , C_2 , K_1 та K_2 – сталі.

Під час рішення рівнянь (5.2) враховуються наступні граничні умови:

1. Рішення в особливих точках:

- при $r \rightarrow 0$ повинно бути $E_1 = |-\text{grad}\varphi_1| \neq \infty$, відповідно $C_2 = 0$;
- при $r = 0, \varphi_1 = 0, K_1 = 0$;
- при $r \rightarrow \infty$ поле стає однорідним та $\varphi_2 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$, відповідно $-E_0 r \cos \theta = C_3 r \cos \theta + K_2$ при будь-якому θ ,
 $C_3 = -E_0, K_2 = 0$.
 $\varphi_1 = C_1 r \cos \theta, \varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{C_4}{r^2} \cos \theta$.

2. На межі розділу двох середовищ $r = R_0$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \text{ або } (E_{1\theta} = E_{2\theta}) \Rightarrow C_1 r = -E_0 r + \frac{C_4}{r^2}; \\ D_{1r} &= D_{2r} \text{ або } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Rightarrow \varepsilon_1 C_1 = -(E_0 + 2 \frac{C_4}{r^3}), \\ C_1 &= -\frac{E_0 3\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}, C_4 = r^3 E_0 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}. \end{aligned}$$

Рішення рівняння Лапласа (5.2) для внутрішнього та зовнішнього середовищ, при вказаних граничних умовах, отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot r \cdot \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -E_0 \cdot r \cdot \cos \theta + E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^3}{r^2} \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Враховуючи, що $r \cos \theta = z$, отримуємо, що напруженість електричного поля всередині кулі має тільки вертикальну складову, тобто $E_1 = \text{const}$ при $r \leq R_0$

$$E_1 = E_{1z} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}. \quad (5.4)$$

По розподілу потенціалу знаходимо напруженість зовнішнього поля $\vec{E} = -\text{grad}\varphi_2$ за двома складовими E_{2r} та $E_{2\theta}$

$$\begin{aligned}
E_{2r} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^3}{r^3} \right) \cos \theta, \\
E_{2\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = E_0 \left(-1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^3}{r^3} \right) \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

Отриманий результат пояснює, чому всередині сторонніх включень діелектрика, які мають меншу діелектричну проникність, напруженість поля може помітно зростати. Це сприяє розвитку пробою та руйнуванню ізоляції через електричний розряд, який виникає всередині включення. Під час $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ напруженість поля в середині кульового включення збільшується у три рази.

При $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ напруженість потроюється в порівнянні з \bar{E}_0 із зовнішньої сторони кулі на полюсах ($R_0 = r, \theta = 0, \pi$).

Таке спотворення поля пояснюється виникненням зв'язаних зарядів на поверхні кулі. Густина зв'язаних зарядів σ_{zv} визначається різницею радіальних складових векторів поляризації

$$\begin{aligned}
\sigma_{zv} &= P_{1r} - P_{2r} = \varepsilon_0 (E_{2r} - E_{1r}) \text{ при } r = R_0, \\
\sigma_{zv} &= 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}.
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

де $\varepsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2. Опис лабораторної установки

Лабораторна робота виконується на комп'ютері з встановленим математичним процесором MathCad. Програмне забезпечення до цієї лабораторної роботи знаходиться у файлі **lab-72.xmcd**.

2.1 Побудова картини електростатичного поля кулі у програмі Mathcad, яка внесена в однорідне електростатичне поле

Визначимо складові комплексного потенціалу для обох областей (згідно з рівнянням (5.3)):

$$\begin{aligned} U_1(r, \theta) = \varphi_1(r, \theta) &= -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot r \cdot \cos \theta, \\ U_2(r, \theta) = \varphi_2(r, \theta) &= -E_0 \cdot r \cdot \cos \theta + E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^3}{r^2} \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Уявні частини комплексного потенціалу знайдемо за системою рівнянь Коші-Рімана, і вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} V_1(r, \theta) = \varphi_1(r, \theta) &= -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot r \cdot \sin \theta, \\ V_2(r, \theta) = \varphi_2(r, \theta) &= -E_0 \cdot r \cdot \sin \theta - E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{R_0^3}{r^2} \cdot \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Тоді комплексний потенціал W у першій та другій областях буде

$$\begin{aligned} W_1(r, \theta) = U_1(r, \theta) + j \cdot V_1(r, \theta) &= -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \cdot r \cdot e^{j\theta} = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \cdot z; \\ W_2(r, \theta) = U_2(r, \theta) + j \cdot V_2(r, \theta) &= \left(-re^{j\theta} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{R_0^3}{r^2} \cdot e^{-j\theta} \right) E_0 = \\ &= \left(-z + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{R_0^3}{r \cdot z} \right) E_0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

де $z(x, y) = x + jy = re^{j\theta}$ – комплексна координата.

3. Програма роботи

3.1 Ознайомитись з основними теоретичними відомостями моделювання електричного поля діелектричної та провідної кулі на ЕОМ за допомогою математичного процесора Mathcad.

3.2 Побудувати картину електростатичного поля кулі у програмі Mathcad відповідно номеру варіанту табл. 5.1, який задає викладач, що провидить лабораторну роботу.

Таблиця 5.1 – Варіанти даних для математичної моделі

№	$R_0, \text{мм}$	$E_0, \text{В / мм}$	$L, \text{мм}$	ε_2
1	1	50	$5 R_0$	6
2	1.1	55	$4 R_0$	4
3	1.2	60	$3 R_0$	5
4	1.3	65	$6 R_0$	6
5	1.4	70	$5 R_0$	7
6	1.5	75	$4 R_0$	8
7	1.6	80	$5 R_0$	9
8	1.7	85	$4 R_0$	8
9	1.8	90	$3 R_0$	7
10	1.9	95	$4 R_0$	6
11	2	100	$5 R_0$	5
12	2.1	105	$6 R_0$	3
13	2.2	110	$5 R_0$	4
14	2.3	115	$4 R_0$	5
15	2.4	120	$3 R_0$	8
16	2.5	125	$6 R_0$	7
17	2.6	130	$3 R_0$	4
18	2.7	135	$5 R_0$	6
19	2.8	140	$4 R_0$	5
20	2.9	145	$3 R_0$	4

3.3 Дослідити картину електростатичного поля кулі за результатами моделювання (пункт 4.3). Приклад представлено у лабораторній роботі №4.

3.4 Порівняти картини електростатичних полів циліндра (лабораторна робота №4) та кулі.

3.4 Оформити звіт по лабораторній роботі.

4. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ПО ВИКОНАННЮ РОБОТИ

4.1. Підготовка до виконання роботи

4.1.1. Вивчити методики побудови картини поля кулі, що розміщений в однорідному зовнішньому електричному полі з напруженістю E_0 .

4.1.2. Ознайомитись використанням з рішення рівняння Лапласа у сферичній системі координат та застосуванням комплексного (аналітичного) потенціалу електростатичного поля для побудови картини цього поля.

4.1.3. Ознайомитись з принципами моделювання електричного поля за допомогою математичної програми Mathcad.

4.1.4. Вивчити програму лабораторної роботи.

4.1.5. Ознайомитися з контрольними питаннями.

4.2. Порядок виконання роботи

4.2.1. Відповідно до табл. 5.1 присвоїти за вказівкою викладача числові значення радіусу циліндра R_0 , напруженості зовнішнього електричного поля E_0 та діелектричним проникностям: ε_1 – діелектричного кулі та ε_2 – зовнішнього середовища.

4.2.2. Задати геометричний розмір робочого простору, в якому буде виконуватись моделювання електричного поля та комірок сітки на яку розбивається весь робочий простір. Для спрощення робочий простір представляє собою квадрат із стороною L , розділений на прямокутні комірки. Кількість комірок задається змінною N та дорівнює N^2 .

4.2.3. Перевірити, щоб рівняння за якими проводиться моделювання відповідали рішенню рівняння Лапласа у сферичній системі координат.

4.2.4. Виконати моделювання для чотирьох випадків:

- a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ – однорідне середовище з діелектричною проникністю ε_2 ;
- b) $\varepsilon_1 = 1 < \varepsilon_2$ – повітряне сферичне включення;

с) $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ – провідна сфера в однорідному полі.

д) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ – діелектричне сферичне включення.

Величини ε_1 та ε_2 задає викладач.

4.2.5. Визначити розподіл потенціалу та напруженості електричного поля всередині та зовні сфери для кожного з випадків, що вказані у пункті 4.2.4.

4.2.6. Зберегти результати моделювання для з випадків у **.doc** - файлі.

4.3. Обробка результатів дослідів

4.3.1. Визначити масштаб для ліній однакового потенціалу за дослідом 4.2.4 а).

4.3.2. Розрахувати за картиною поля потенціал φ та напруженість електричного поля E у точках, заданих викладачем, а також напругу між точками.

4.3.3. Через вказані точки всередині сфери, провести лінії однакового потенціалу та силові лінії продовжуючи їх зовні кулі;

4.3.4. Розрахувати величину наведеного заряду на поверхні сфери;

4.3.5. Зробити висновок про спотворення однорідного електричного поля зовні сфери у дослідях 4.2.4.

ЗМІСТ ЗВІТУ

Протокол з лабораторної роботи має містити матеріали, що оформлюються відповідно до правил та вимог ЄСКД та ДСТУ:

- титульний аркуш, прилад якого наведено у додатку А;
- мету та послідовність виконання лабораторної роботи;
- електричні схеми з параметрами елементів, що досліджуються;
- таблиці величин, що вимірюються та розраховуються;
- умови завдання для варіанту бригади;

- формули обчислень, повинні бути представлені у заданому порядку: рівняння у літерних позначеннях, рівняння у числах, відповідь та одиниці виміру;
- діаграми та графіки, що побудовані за результатами експериментів і розрахунків;
- програми та результати моделювання у математичному середовищі Mathcad;
- висновки за даними лабораторної роботи (проаналізувати картину поля сфери, який розміщений у зовнішньому електричному полі).

Питання для самостійної роботи

1. Які величини характеризують електростатичне поле і який зв'язок між ними?
2. За якими правилами будується картина електростатичного поля?
3. Як виконується розв'язок рівняння Лапласа і як виглядає рішення цього рівняння для поля діелектричного циліндра, розміщеного в однорідному зовнішньому полі?
4. З якою метою на практиці використовують картину поля?

Приклад **Mathcad** – програми, що реалізує описаний алгоритм розрахунку характеристик електричного поля у діелектрику при появі в його структурі сферичного включення.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ КУЛІ НА БОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MATHCAD.

Задаємо параметри математичної моделі:

$R_o := 1.2$	- Радіус кулі	
$E_o := 60$	- Напруженість однорідного зовнішнього електричного поля	
$L := 3R_o$	- Довжина сторони квадратного поля, на якому проводиться моделювання електричного поля	
$N := 151$	- Кількість комірок на кожній стороні квадратного поля	
$i := 0..N$	- індекси комірок по осях X та Y	
$j := 0..N$	- індекси комірок по осях X та Y	
$x_i := \frac{-L}{2} + \frac{L}{N} \cdot i$	- координати комірок по осях X та Y	+
$y_j := \frac{-L}{2} + \frac{L}{N} \cdot j$	- координати комірок по осях X та Y	
$z(x, y) := x + j \cdot y$	- комплексна координата	
$R_{i,j} := \text{if}(z(x_i, y_j) \leq R_o, R_o, 0)$	- Рівняння кола, яке має радіус кулі	

Наводимо вирази опису комплексних потенціалів та їх складових для електростатичного поля всередині та зовні сфери.

$\epsilon_1 := 1 \quad \epsilon_2 := 5$	- Відносні діелектричні проникності кулі і середовища.	
$W1(x, y, \epsilon_1, \epsilon_2) := \frac{-3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \cdot E_o \cdot z(x, y)$		
$W2(x, y, \epsilon_1, \epsilon_2) := \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \cdot \frac{R_o^3}{ z(x, y) \cdot z(x, y)} - z(x, y) \right) \cdot E_o$	- комплексні потенціали всередині та зовні кулі	
$W_{i,j} := \text{if}(z(x_i, y_j) \leq R_o, W1(x_i, y_j, \epsilon_1, \epsilon_2), W2(x_i, y_j, \epsilon_1, \epsilon_2))$	- комплексний потенціал на всій площі моделі	
$U_{i,j} := \text{Re}(W_{i,j})$	- Потенціальна функція електричного поля	
$V_{i,j} := -\text{Im}(W_{i,j})$	- Поточкова функція електричного поля	

Виконаємо дослід, в якому діелектрична проникність сферичного включення менше ніж проникність середовища (повітряне включення в ізоляції електричного конденсатора). На рис. 5.2 представлена для цього дослідження графічна картина електростатичного поля з діелектричною сферою.

БУДУЄМО КАРТИНУ ПОЛЯ ПРИ ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРАХ

$\epsilon_1 = 1$ $\epsilon_2 = 5$ - відносні діелектричні проникності кулі та середовища.
 $N = 151$ - кількість комірок на кожній стороні квадратного простору.
 $E_0 = 60$ - напруженість однорідного зовнішнього електричного поля, В/мм

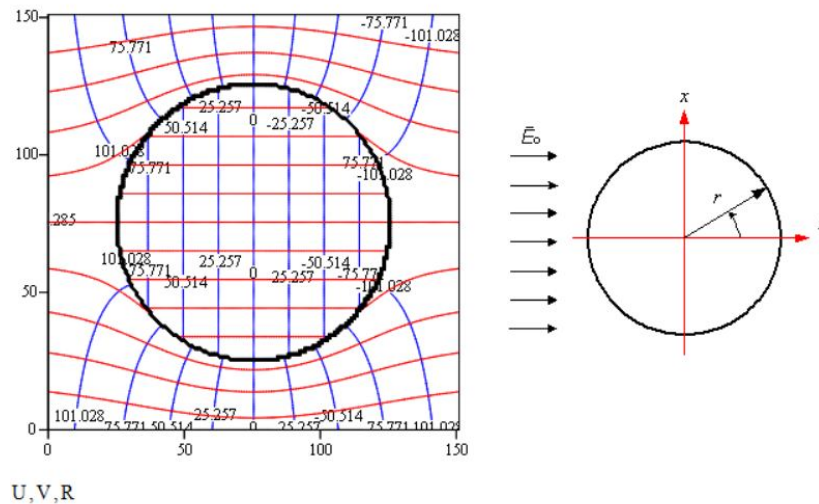


Рисунок 5.2 – Графічна картина електростатичного поля з діелектричною сферою

Бібліографічний список використаної літератури

1. Гусейнова Т.И. Методические указания к лабораторно – практичным работам по курсу «Теория электромагнитного поля» с применением ЭВМ / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; Сост.: Т.И Гусейнова, Т.М. Крайнова, Е.В. Парфенов, – Уфа , 2003. – 68 с.
2. Слободян Л.Р. Електромагнітні поля електротехнічних установок / Л.Р. слободян, В.І. Шеховцов // Навч. посібник. – К.: Либідь, 1994. – 176 с.
3. Ионкин П.А. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехнике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. проф. П.А. Ионкин, Г.П. Андреев, С.Н Андреев и др. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

ДОДАТОК А

Приклад оформлення титульного аркуша лабораторної роботи

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет електроенерготехніки та автоматики
Кафедра теоретичної електротехніки**

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

з дисципліни "Методи електродинаміки в електротехніці та електромеханіці"

**на тему: "ДОСЛІДЖЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ ТРИФАЗНОЇ
СИСТЕМИ НАПРУГ"**

Виконав студент групи ЕП - 91 Петренко І.І.

(підпис)

Перевірів

(підпис)

Київ – 202__р.